D. S. Mitrinović D. Mihailović P.M. Vasić

LINEARNA ALGEBRA POLINOMI ANALITIČKA GEOMETRIJA



SADRŽAJ

DODATAK

LITERATURA ZA DALJE STUDIJE

K. Alendorfer — K. Okli: *Principi matematike*. Beograd 1961.
A. R. Amir-Moéz — A. L. Fass: *Elements of linear spaces*. New York 1962.
R. V. Andree: *Selections from modern abstract algebra*. New York 1959.
S. Barnard — J. M. Child: *Higher algebra*. London 1955.
G. Bauer — L. Bieberbach: *Algebra*, 4. Aufl. Leipzig—Berlin 1928.
R. Bellman: *Introduction to matrix analysis*. New York 1960.
M. Bertolino: *Numerička analiza*. Beograd 1970.
G. Birkhoff — S. MacLane: *A survey of modern algebra*. New York 1950.
Н. Бурбаки: *Алгебра: Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра*. Москва 1962.
V. Devidé: *Matematička logika*, prvi deo. Beograd 1964.
L. E. Dickson — E. Bodewig: *Höhere Algebra*. Leipzig—Berlin 1929.
J. Dieudonné: *Foundations of modern analysis*. New York 1960.
P. Dubreil: *Algèbre*, t. I (seconde édition). Paris 1956.
Д. К. Фаддеев — В. Н. Фаддеева: *Вычислителные методы линейной алгебры*, издание второе. Москва 1960.
L. Félix: *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*. Paris 1959.
A. Fletcher — J. C. P. Miller — L. Rosenhead: *An index of mathematical tables*. London —New York 1946.
Ф. Р. Гантмахер: *Теория матриц*. Москва 1954.
P. R. Halmos: *Naive set theory*. Princeton 1960.
G. H. Hardy: *A course of pure mathematics*, ninth edition. Cambridge 1948.
A. S. Householder: *Principles of numerical analysis*. New York 1953.
G. Julia: *Introduction mathématique aux théories quantiques*, première partie, deuxième édition. Paris 1949.
J. Karamata: *Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju*. Beograd 1950.
K. Kuratowski: *Introduction to set theory and topology*. Oxford—London—New York—Paris 1961.
Đ. Kurepa: *Teorija skupova*. Zagreb 1951.
Đ. Kurepa: *Viša Algebra*, I—II. Zagreb 1965.
S. Kurepa: *Uvod u matematiku: Skupovi, strukture, brojevi*. Zagreb 1970.
S. Kurepa: *Matematička analiza: Diferenciranje i integriranje*. Zagreb 1970.
S. Kurepa: *Uvod u linearnu algebru*. Zagreb 1975.
А. Г. Курош: *Алгебраические уравнения произвольных степеней*. Москва—Ленинград 1951.
А. Г. Курош: *Курс высшей алгебры*, издание четвёртое. Москва 1955.
А. Г. Курош: *Лекции по общей алгебре*. Москва 1962.
E. Landau: *Grundlagen der Analysis*, second American edition. New York 1948.
А. Б. Лебедев—Р. М. Федорова: *Справочник по математическим таблицам*. Москва 1956.
C. C. Mac Duffy: *The theory of matrices*. Berlin 1933.
M. Marcus—H. Minc: *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Boston 1964.
Б. Е. Маргулис: *Системы линейных уравнений*. Москва 1960.
D. S. Mitrinović, u saradnji sa J. D. Kečkićem: *Algebra* (*zbirka problema iz kombinatorike, polinoma i jednačina*). Beograd 1969.

D. S. Mitrinović, saradnik P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti.* Beograd 1970.
D. S. Mitrinović: *Matematička indukcija. Binomna formula. Kombinatorika.* Beograd 1970.
D. S. Mitrinović: *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima,* I deo. Beograd 1971.
A. Mostowski — M. Stark: *Introduction to higher algebra.* Oxford—London—New York—Paris—Warszawa 1964.
F. Neiss: *Determinanten und Matrizen.* Berlin 1941.
E. Netto: *Lehrbuch der Combinatorik,* zweite Auflage. Leipzig 1927 (preštampao Chelsea, USA).
Н. Обрешков: *Виша алгебра.* София 1954.
Л. Я. Окунев: *Высшая алгебра.* Москва 1958.
A. M. Ostrowski: *Solution of equations and systems of equations.* New York 1960.
O. Perron: *Algebra,* Bde I—II (3. Aufl.). Berlin 1951.
S. B. Prešić: *Elementi matematičke logike.* Beograd 1973.
И. В. Проскуряков: *Сборник задач по линейной алгебре.* Москва 1957.
J. Riordan: *An introduction to combinatorial analysis.* New York 1958.
H. J. Ryser: *Combinatorial mathematics.* Rahway (USA) 1963.
H. Schwerdtfeger: *Introduction to linear algebra and the theory of matrices.* Groningen 1961.
W. Sierpiński: *Algèbre des ensembles.* Warszawa—Wroclaw 1951.
A. Tarski: *Uvod u matematičku logiku i metodologiju matematike.* Beograd 1973.
J. V. Uspensky: *Theory of equations.* New York 1948.
M. Zamansky: *Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes.* Paris 1958.
R. Zurmühl: *Matrizen.* Berlin 1960.
M. Холл: *Комбинаторный анализ.* Москва 1963.
И. М. Яглом: *Комплексные числа.* Москва 1963.

INDEKS OZNAKA

SIMBOL	UPOTREBA	STRANA NA KOJOJ JE DEFINISAN	ZNAČENJE
$\wedge$	$p \wedge q$	2	p i q
$\vee$	$p \vee q$	3	p ili q
$'$	P'	3	Negacija suda p
$'$	A'	12	Komplement skupa A
$'$	a'	26	Simetričan element elementu a
$\veebar$	$p \veebar q$	3	p ili q ali ne oba
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	3	Ako p tada q
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	4	Ako p tada q i ako q tada p
$\forall$	$\forall a$	4	Za svako a
$\exists$	$\exists a$	4	Postoji bar jedno a
$\{\ \}$	$\{x, y, z, \ldots\}$	6	Skup čiji su elementi $x, y, z, \ldots$
$\{\mid\}$	$\{x \mid P(x)\}$	6	Skup svih elemenata x koji imaju osobinu $P(x)$
$\in$	$x \in S$	6	x je element skupa S
$\notin$, non $\in$	$x \notin S$, x non $\in S$	6	x nije element skupa S
N		7	Skup svih prirodnih brojeva
Z		7	Skup svih celih brojeva
Q		7	Skup svih racionalnih brojeva
R		7	Skup svih realnih brojeva
R+		7	Skup svih pozitivnih brojeva
I		7	Skup svih iracionalnih brojeva
C		7	Skup svih kompleksnih brojeva
(,)	(a, b)	7	Skup svih realnih brojeva između a i b
(,)	(a, b)	13	Uređen par elemenata a i b
[,]	$[a, b]$	7	Skup svih realnih brojeva između a i b, uključujući a i b
$\subset$	$A \subset B$	7	A je podskup skupa B
$\cup$	$A \cup B$	8	Unija skupova A i B
$\cap$	$A \cap B$	9	Presek skupova A i B
$\emptyset$	$\emptyset$	9	Prazan skup
$\setminus$	$A \setminus B$	11	Razlika skupova A i B
Δ	$A \Delta B$	11	Simetrična diferencija skupova A i B
$\times$	$A \times B$	14	Dekartov proizvod skupova A i B
ρ	$a \rho b$	15	Binarna relacija
$\rightarrow$	$f: X \rightarrow Y$	17	Funkcija X u Y
$\mapsto$	$x \mapsto f(x)$	18	Funkcija koja elementu x pridružuje element $f(x)$
$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$	20	Biunivoka korespodencija
$\circ, \cdot$	$a \circ b$, $a \cdot b$	23	Binarana operacija
i	i	43	Imaginarna jedinica
Re	Re z	43	Realni deo kompleksnog broja z
Im	Im z	43	Imaginarni deo kompleksnog broja z
—	$\bar{z}$	44	Konjugovano-kompleksan broj broju z
$\lvert\ \rvert$	$\lvert z \rvert$	45	Modul kompleksnog broja z
Arg	Arg z	46	Argument kompleksnog broja z

SIMBOL	UPOTREBA	STRANA NA KOJOJ JE DEFINISAN	ZNAČENJE
arg	arg z	46	Glavni argument kompleksnog broja z
cis	cis θ	46	Kompleksan broj čiji je moduo 1 i argument θ
!	$n!$	60	Proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do n
!!	$(2n)!!$	60	Proizvod svih parnih brojeva od 2 do $2n$
!!	$(2n+1)!!$	60	Proizvod svih neparnih brojeva od 1 do $2n+1$
$\binom{}{}$	$\binom{n}{k}$	61	Binomni koeficijent
V_n^k	V_n^k	67	Broj varijacija od n elemenata klase k
P_n	P_n	68	Broj permutacija od n elemenata
C_n^k	C_n^k	68	Broj kombinacija od n elemenata klase k
$\overline{V}_n^k$	$\overline{V}_n^k$	69	Broj varijacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata
$P_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$	$P_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$	69	Broj permutacija sa ponavljanjem
$\overline{C}_n^k$	$\overline{C}_n^k$	71	Broj kombinacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata
$\lVert\ \rVert_1^n$	$\lVert a_{ik} \rVert_1^n$	73	Kvadratna matrica tipa $n \times n$
$\lVert\ \rVert_{m,n}$	$\lVert a_{ik} \rVert_{m,n}$	75	Pravougaona matrica tipa $m \times m$
$O, O_{m,n}, O_n$	$O, O_{m,n}, O_n$	77	Nula matrica
$\delta_{i,k}$	δ_{ik}	79	Kroneckerova delta
I, E, I_n	I, E, I_n	79	Jedinična matrica
T	A^T	84	Transponovana matrica
det	det A	91	Determinanta matrice A
A_{ik}	A_{ik}	104	Kofaktor elementa A_{ik}
adj	adj A	110	Adjungovana matrica
-1	A^{-1}	127	Inverzna matrica
rang	rang A	138	Rang matrice
$\cong$	$A \cong B$	142	Ekvivalentne matrice
P_n, P	$P_n(x), P(x)$	154	Polinom
dg	dg $P(x)$	154	Stepen polinoma
$>, <, =$	$a>b, a<b, a=b$	210	Relacija veće, manje, jednako
$\vert\ \vert$	$\vert a \vert$	211	Moduo realnog broja a
H_n	$H_n(a)$	227	Harmonijska sredina
G_n	$G_n(a)$	227	Geometrijska sredina
A_n	$A_n(a)$	227	Aritmetička sredina
M_n	$M_n(a)$	227	Kvadratna sredina
M_r	$M_r(a; p)$	230	Težinska sredina reda r
$a, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$	$a, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$	238	Vektori
$a, \vert\vec{a}\vert, \vert\overrightarrow{AB}\vert$	$a, \vert\vec{a}\vert, \vert\overrightarrow{AB}\vert$	238	Intenziteti vektora
a_0	a_0,	239	Jedinični vektor
i, j, k	i, j, k	249	Jedinični vektori osa koordinatnog sistema
$\cdot$	$a \cdot b$, ab	255	Skalarni proizvod
( ), (,)	(ab), (a, b)	255	Skalarni proizvod
$\times$	$a \times b$	264	Vektorski proizvod
[,]	$[a, b]$	264	Vektorski proizvod
	$(a \times b)c$	272	Mešoviti proizvod

UVOD

1. ELEMENTI OPŠTE ALGEBRE

1.1. POJMOVI I OZNAKE MATEMATIČKE LOGIKE

Zbog preciznosti i kratkoće u izlaganju, u matematici se koriste neki pojmovi i oznake matematičke logike.

Definicija 1. *Pod sudom se podrazumeva iskaz koji ima smisla i za koji važe sledeća dva principa:*

1° (*Princip isključenja trećeg*). *Svaki sud ima bar jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. ne postoji sud koji ne bi bio ni istinit ni neistinit;*

2° (*Princip kontradikcije*). *Svaki sud ima najviše jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. nema suda koji bi bio i istinit i neistinit.*

Ovo je opisna, intuitivna, definicija suda.

Prema ovoj definiciji, dakle, svaki sud ima samo jednu vrednost istinitosti: sud je ili istinit ili neistinit.

Definicija 2. *U matematici se istinit sud zove teorema ili stav.*

Vrednost istinitog suda označava se sa $\top$ ili sa 1, a neistinitog $\bot$ ili 0.

Među elementima $\top$ i $\bot$, odnosno 1 i 0, definišu se operacije od kojih su osnovne: konjunkcija ($\wedge$), disjunkcija ($\vee$), negacija ($'$), implikacija ($\Rightarrow$), ekvivalencija ($\Leftrightarrow$).

1.1.1. KONJUNKCIJA, DISJUNKCIJA, NEGACIJA

Ako su p i q dva suda, sud »p i q« zovemo konjunkcija (ili proizvod) sudova p i q i označavamo ga $p \wedge q$.

Taj sud je istinit jedino ako su oba suda p i q istiniti.

Navedena činjenica pregledno se predstavlja tablicom istinitosti[1]

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Ako su p i q dva suda, pod sudom »p ili q« podrazumeva se tvrđenje da vredi bilo sud p bilo sud q, uz mogućnost da istovremeno vrede oba.

Ovaj složeni sud zove se disjunkcija (inkluzivna) (ili zbir) sudova p i q i označava se sa $p \vee q$.

[1] Da bi se pravila razlika između suda i njegove vrednosti istinitosti, ponekad se sudovi označavaju velikim slovima, a odgovarajuće vrednosti istinitosti malim slovima.

Disjunkcija $p \vee q$ je istinita ako je istinit bar jedan od sudova p i q. U ovom slučaju tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Negacija suda p označava se sa p'. Sud p' je istinit ako i samo ako je sud p neistinit, i neistinit ako i samo ako je sud p istinit.

Odgovarajuća tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	p'
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Sud »p ili q, ali ne oba« zove se ekskluzivna disjunkcija. Ovaj sud se izražava pomoću

$$(p \wedge q') \vee (q \wedge p')$$

i obeležava se sa $p \underline{\vee} q$.

Ova činjenica, predstavljena pomoću tablice vrednosti istinitosti, glasi:

p	q	$p \underline{\vee} q$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

1.1.2. IMPLIKACIJA

Ako su p i q sudovi, sud: »Ako p tada q« zovemo implikacija suda q sa sudom p, ili implikacija od suda p na sud q, i označavamo ga $p \Rightarrow q$.

Sud »Ako p tada q« ima isto značenje kao:

(1) p je dovoljan uslov za q;
(2) q je potreban uslov za p;
(3) iz p sleduje q;
(4) q je posledica suda p.

Implikacija $p \Rightarrow q$ je neistinita ako i samo ako je p istinito a q neistinito, tj. $(\top \Rightarrow \bot) = \bot$.

Inače je

$$(\top \Rightarrow \top) = (\bot \Rightarrow \top) = (\bot \Rightarrow \bot) = \top.$$

Ovo se pregledno prikazuje shemom koja se naziva tablica vrednosti istinitosti za operaciju implikacija:

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$q \not\Rightarrow p$ znači da iz q ne proističe p.

PRIMER 1. $a = -1 \Rightarrow a^2 = 1$. $\quad a^2 = 1 \not\Rightarrow a = -1$.

PRIMER 2. $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$. $\quad a < 0 \Rightarrow a^2 > 0$. $\quad a^2 > 0 \not\Rightarrow a > 0$. $\quad a^2 > 0 \not\Rightarrow a < 0$.

1.1.3. EKVIVALENCIJA

Ako su p i q sudovi, sud: »Ako p, tada q i ako q tada p« zove se ekvivalencija suda p sa sudom q i označava se $p \Leftrightarrow q$.

Sud $p \Leftrightarrow q$ isto znači kao:

(1) p je ako i samo ako je q;

(2) p je potreban i dovoljan uslov za q.

Prema tome, ekvivalencija je složen sud $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ i njena tablica vrednosti istinitosti glasi:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

PRIMER 1. $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$; $\frac{1}{a}>0 \Rightarrow a>0$; $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$.

PRIMER 2. $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b=0 \quad (a,\ b \in \mathbf{R})$.

$a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -1 \quad (a \in \mathbf{C})$.

1.1.4. KVANTIFIKATORI

Iskaz »za svako a važi $a=a$« simbolizuje se

$(\forall a),\ a=a$ ili $\forall a,\ a=a$.

Iskaz »za svako a i b iz skupa **C** kompleksnih brojeva važi[1]

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$«

simbolizuje se

$(\forall a),\ (\forall b) \quad (a,\ b \in \mathbf{C}) \Rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Iskaz »postoji bar jedno x iz skupa **C** kompleksnih brojeva takvo da je

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})$«

simbolizuje se

$(\forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})\,(\exists x \in \mathbf{C}) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$.

Iskaz »za svako x postoji bar jedno y takvo da je $x<y$« simbolizuje se

$(\forall x)(\exists y) \quad x<y$.

Oznake $\forall$ (svaki, svi) i $\exists$ (postoji bar jedno) zovu se kvantifikatori (kvantori).

1.1.5. TAUTOLOGIJA, KONTRADIKCIJA

Definicija 1. *Svaki složeni sud dobijen primenom logičkih operacija* $\wedge$, $\vee$, $'$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *na neke polazne sudove naziva se formula.*

Formule su, na primer, $p \Rightarrow (q \wedge r)$, $(p \vee q)' \Leftrightarrow (r \Rightarrow (s \wedge t))$.

[1] O značenju $\in$ videti 1.2.

Definicija 2. *Formula koja za sve vrednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobija vrednost* $\top$ *naziva se tautologija.*

Primeri nekih važnijih tautologija dati su u 1.1.6.

Definicija 3. *Formula koja za sve vrednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobija vrednost* $\bot$ *naziva se kontradikcija.*

PRIMER 1. $p \wedge p'$ je kontradikcija.

1.1.6. OSOBINE LOGIČKIH SIMBOLA

Stav 1. *Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne:*

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$; $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$.

Stav 2. *Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su asocijativne:*

$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$; $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$;

$((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$.

Stav 3. *Konjunkcija i disjunkcija su idempotentne:* $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.

Stav 4. *Konjunkcija i disjunkcija su distributivne:*

$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge (p \wedge r))$; $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \vee r))$.

Stav 5. *Konjunkcija je distributivna prema disjunkciji i obratno:*

$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$; $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Stav 6. *Konjunkcija je apsorptivna prema disjunkciji i obratno:*

$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$; $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$.

Stav 7. *Negacija je involutivna:*

$(p')' \Leftrightarrow p$.

Stav 8. (DE MORGANOVI zakoni): $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$; $(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$.

Stav 9. $\top$ *je neutralni element za konjunkciju i ekvivalenciju, a* $\bot$ *za disjunkciju:*

$(p \wedge \top) \Leftrightarrow (\top \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\top \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p$;

$(p \vee \bot) \Leftrightarrow (\bot \vee p) \Leftrightarrow p$.

Stav 10. $\top$ *je nula-element za disjunkciju, a* $\bot$ *za konjunkciju:*

$(p \vee \top) \Leftrightarrow (\top \vee p) \Leftrightarrow \top$; $(p \wedge \bot) \Leftrightarrow (\bot \wedge p) \Leftrightarrow \bot$.

Navedene osobine mogu se dokazati, na primer, pomoću tablica vrednosti istinitosti. Primera radi, dokazaćemo, na ovaj način, stav 4 i stav 7.

***Dokaz stava* 5.** Odgovarajuća tablica vrednosti istinitosti je

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Kako su peta i osma kolona u ovoj tablici identične, zaključujemo da je tačna prva osobina navedena u stavu 5.

***Dokaz stava* 8.** Dokaz neposredno sleduje iz jednakosti 6. i 10. kolone, odnosno 8. i 9. kolone u sledećoj tablici istinitosti:

p	q	p'	q'	$p\vee q$	$(p\vee q)'$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)'$	$p'\vee q'$	$p'\wedge q'$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

PRIMER 1. $(p\wedge q)\vee(p'\wedge q') \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Tablica vrednosti istinitosti je

p	q	p'	q'	$p\wedge q$	$p'\wedge q'$	$(p\wedge q)\vee(p'\wedge q')$	$p\Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako su poslednje dve kolone jednake, data ekvivalencija je dokazana.

PRIMER 2. $(p \Rightarrow (q\wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q)\wedge(p \Rightarrow r))$.

Tablica vrednosti istinitosti je:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\Rightarrow(q\wedge r)$	$p\Rightarrow q$	$p\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako su u ovoj tablici peta i osma kolona istovetne, ekvivalencija je tačna.

1.2. POJAM SKUPA

Skup (množina, mnoštvo, klasa, kolekcija) i njegovi elementi (članovi, tačke, objekti) su osnovni pojmovi matematike.

Ako skup S sačinjavaju elementi $x, y, z, \ldots$, označava se $S=\{x, y, z, \ldots\}$.

Sa $S=\{x \mid P(x)\}$ ili $S=\{x : P(x)\}$ označava se skup svih elemenata x koji imaju osobinu P.

Ako je S skup, tada $x\in S$ označava da je x element skupa S ili da x pripada skupu S.

Negacija ovog iskaza označava se $x\notin S$ ili x non$\in S$.

Za neke skupove, koji su u čestoj upotrebi, usvojene su sledeće oznake:

N skup svih prirodnih brojeva,

Z skup svih celih brojeva,

Q skup svih racionalnih brojeva,

R skup svih realnih brojeva,

R$^+$ skup svih pozitivnih brojeva,

I skup svih iracionalnih brojeva,

C skup svih kompleksnih brojeva,

(a, b) otvoren interval u **R** ili kraće interval,

$[a, b]$ zatvoren interval u **R** ili kraće segment.

Skup ne zavisi od poretka kojim su dati njegovi elementi. Tako, na primer, skupovi $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 1, 3\}$ su jednaki. Skupovi $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 2, 3, 3\}$ takođe su jednaki.

Ako je n prirodan broj, skup $S=\{x_1, \ldots, x_n\}$ od n elemenata $x_1, \ldots, x_n$ je konačan. Skup je beskonačan ako broj njegovih elemenata nije konačan.

1.3. INKLUZIJA

Definicija 1. *Za skup B kaže se da je sadržan u skupu A, tj. da je B podskup ili deo skupa A, ako je svaki element skupa B takođe element skupa A, tj. ako iz $x\in B$ sleduje $x\in A$.*

Činjenica da je B deo skupa A označava se

$$B\subset A \text{ ili } A\supset B.$$

Znak $\subset$ odnosno $\supset$ zove se znak inkluzije.

Na slici 1.3.1 su shematski prikazani skupovi A i B takvi da je $B\subset A$ (ovaj način prikazivanja skupova, koji se poglavito upotrebljava u srednjoj školi, poznat je kao VENNOVI ili EULER-VENNOVI dijagrami. Treba primetiti da ovo ne predstavlja sredstvo za dokazivanje stavova iz teorije skupova već samo shematsku ilustraciju).



Sl. 1.3.1.

Logičkim simbolima relacija $B\subset A$ se piše u obliku

$$B\subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x\in B \Rightarrow x\in A).$$

Definicija 2. *Skupovi A i B su jednaki ako je $B\subset A$ i $A\subset B$.*

Prema tome, za dva skupa A i B kaže se da su jednaki ako i samo ako se sastoje od istih elemenata. Ako su A i B jednaki skupovi, to se simbolizuje $A=B$. Ako oni nisu jednaki, označava se $A\neq B$.

Simbolima matematičke logike jednakost skupova A i B izražava se sa

$$B\subset A\wedge A\subset B \Leftrightarrow A=B.$$

Činjenicu da A nije jednako B označavamo $A\neq B$.

Definicija 3. *Ako je $B \subset A$ i $A \neq B$, kaže se da je B pravi podskup skupa A.*

Inkluzija ima osobine:

$A \subset A$ (refleksivnost)

$(C \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow C \subset A$ (tranzitivnost).

Definicija 4. *Partitivni skup skupa M, u oznaci $P(M)$, je skup svih podskupova skupa M.*

1.4. UNIJA, PRESEK I DIFERENCIJA SKUPOVA

1.4.1. UNIJA SKUPOVA

Definicija 1. *Ako su A i B dva skupa, pod unijom (zbirom) skupova A i B (u oznaci $A \cup B$) podrazumeva se skup svih elemenata koji se nalaze bar u jednom od skupova A i B.*

Unija skupova A i B označava se takođe $A+B$.

Pomoću logičkih simbola definicija unije skupova A i B glasi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

ili

$$(\forall x) \quad (x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Stav 1. *Unija ima osobine:*

$A \cup A = A$ *(idempotentnost)*,

$A \cup B = B \cup A$ *(komutativnost)*,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(asocijativnost)*,

$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$ *(distributivnost)*,

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ *(apsorptivnost)*,

gde su A, B, C tri ma koja skupa.

Dokaz. Da unija ima osobinu idempotentnosti zaključujemo iz sledećeg:

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A,$$

pri čemu smo iskoristili prvu od ekvivalencija iz stava 3 u 1.1.6.

Komutativnost sleduje iz komutativnosti disjunkcije (stav 1 u 1.1.6)

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A.$$

Osobina asocijativnosti unije posledica je sledećih ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C), \end{aligned}$$

pri čemu smo primenili drugu od ekvivalencija iz stava 2 u 1.1.6.

Slično ovome, osobina distributivnosti sleduje na osnovu sledećih ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup C) \vee (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Ovde je primenjena prva od ekvivalencija iz stava 4 u 1.1.6.

Dokažimo na kraju osobinu apsorptivnosti. Najpre imamo

(1) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$

Kako je (videti 1.3)

(2) $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

iz (1) i (2) sleduje da važi implikacija $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

Navedene osobine idempotentnosti i distributivnosti operacije $\cup$ u odnosu na samu sebe nemaju ni sabiranje ni množenje u običnoj aritmetici.

Zajednički rezultat izraza $(A \cup B) \cup C$ i $A \cup (B \cup C)$ označava se $A \cup B \cup C$.

Unija skupova $A_1, \ldots, A_n$ skraćeno se obeležava sa $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

1.4.2. PRESEK SKUPOVA

Definicija 1. *Presek (proizvod, zajednički deo) datih skupova A i B (u oznaci $A \cap B$) je skup svih elemenata koji u isti mah pripadaju i skupu A i skupu B.*

Presek skupova A i B označava se takođe $A \cdot B$ ili AB.

Pomoću logičkih simbola definicija preseka skupova A i B glasi:

$$(\forall x) \quad (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B),$$

ili

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definicija 2. *Za dva skupa kaže se da su disjunktni ako nemaju zajedničkih elemenata.*

Ovo navodi na uvođenje pojma skupa bez elemenata. To je prazan (pust) skup. Obeležava se $\emptyset$ ili ν (vakuum) ili Λ.

Simbolička definicija praznog skupa glasi:

$$A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x) \quad x \notin A, \quad \text{ili} \quad \emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Prema tome, jednakost $A \cap B = \emptyset$ izražava da je skup $A \cap B$ prazan, tj. da su A i B disjunktni.

Za svaki skup A i za skup $\emptyset$ važi

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Da skupovi A i B nisu disjunktni, označava se sa

$$(\exists x) \quad x \in A \cap B, \quad \text{ili} \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

Stav 1. *Presek ima osobine*

$$A \cap A = A \quad (\textit{idempotentnost}),$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (\textit{komutativnost}),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\textit{asocijativnost}),$$

$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C) \quad (\textit{distributivnost}),$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \quad (\textit{apsorptivnost}),$$

gde su A, B, C tri ma koja skupa.

Dokaz stava 1 može se izvesti analogno dokazu stava 1 iz 1.4.1.

Navedene osobine idempotentnosti i distributivnosti operacije $\cap$ u odnosu na samu sebe nemaju ni sabiranje ni množenje u običnoj aritmetici.

Zajednički rezultat izraza $(A \cap B) \cap C$ i $A \cap (B \cap C)$ označava se $A \cap B \cap C$.

Presek skupova $A_1, \ldots, A_n$ skraćeno se obeležava sa $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Bez teškoće dokazuje se sledeći stav:

Stav 2. *Po dve i dve od tri relacije*

$$A \subset B, \quad A \cap B = A, \quad A \cup B = B$$

su ekvivalentne, naime

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B).$$

1.4.3. DISTRIBUTIVNOST $\cup$ PREMA $\cap$, I OBRATNO

Stav 1. *Operacije unija i presek distributivne su jedna prema drugoj, tj. za ma kakve skupove A, B, C je*

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Dokaz. Dokazaćemo jednakost (1). Ona je posledica sledećih ekvivalencija:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \vee x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Ovde je primenjena prva od ekvivalencija iz stava 4 u 1.1.6.

Analogno se dokazuje i jednakost (2):

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Jednakosti (1) i (2) mogu se dokazati i pomoću tablica istinitosti. Primera radi, dokazaćemo na taj način jednakost (2).

Ako x pripada skupu, označićemo sa $\top$, a ako ne pripada sa $\perp$. Tada je tablica vrednosti istinitosti

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cap B$	$x \in (A \cap B) \cup C$	$x \in A \cup C$	$x \in B \cup C$	$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Kako su peta i osma kolona identične, dokazali smo ekvivalenciju

$$(\forall x) \quad x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

1.4.4. DIFERENCIJA DVA SKUPA

Definicija 1. *Pod diferencijom (razlikom) dva skupa A i B (u oznaci $A \backslash B$) podrazumeva se skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B.*

Diferencija skupova A i B, pomoću ranije uvedenih simbola, izražava se

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj.

$$(\forall x) \quad x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Definicija 2. *Unija skupova $A \backslash B$ i $B \backslash A$ naziva se simetrična diferencija skupova A i B i označava $A \triangle B$, tj.*

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ &= \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}. \end{aligned}$$

1.4.5. KOMPLEMENT SKUPA

Ako je $A \subset I$ i $\emptyset$ prazan skup, važe relacije

$$\emptyset \subset A \subset I, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad \emptyset \cup A = A, \quad I \cap A = A, \quad I \cup A = I.$$

Druga i treća od ovih relacija već su bile navedene u 1.4.2.

Definicija 1. *Ako je $A \subset I$, skup*

$$A' = \{x \mid x \notin A \wedge x \in I\}$$

je komplement skupa A u odnosu na skup I.

Ovoj definiciji ekvivalentna je

Definicija 2. *Komplement skupa A u odnosu na skup I je skup A' takav da je*

$$A' = I \setminus A.$$

Diferenciju skupova A i B (A, $B \subset I$) možemo pomoću preseka i komplementa izraziti na sledeći način:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

Bez teškoće se dokazuje sledeći stav:

Stav 1. *Važe jednakosti*

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = I \quad (A \subset I).$$

Dokazaćemo sada DE MORGANov stav:

Stav 2. *Važe dualne relacije*

(1) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

(2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Dokaz. Dokažimo prvo jednakost (1):

$$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in (A' \cup B').$$

Jednakost (2) dokazaćemo pomoću tablice istinitosti:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cup B)$	$x \in (A \cup B)'$	$x \in A'$	$x \in B'$	$x \in (A' \cap B')$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Na sličan način mogu se dokazati stavovi:

Stav 3. *Važe sledeće ekvivalencije*

$$A = B \Leftrightarrow (A \cap B = A \wedge A \cup B = A)$$
$$\Leftrightarrow (A \cap B' = \emptyset \wedge A' \cup B = I)$$
$$\Leftrightarrow (A \cup B = A \wedge A' \cup B = I).$$

Stav 4. *Komplement skupa ima osobinu involutivnosti, tj. za svaki skup A važi*

$$(A')' = A.$$

1.4.6. APSORPTIVNOST

Stav 1. *Za ma koje skupove A i B važe apsorptivne jednakosti*

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

Dokaz. Pre svega je

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B),$$

pa možemo staviti

$$D = A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B).$$

Dalje je

$$A \cup D = A \cup (A \cup (A \cap B)) = A \cup (A \cap B) = D,$$
$$A \cap D = A \cap (A \cap (A \cup B)) = A \cap (A \cup B) = D.$$

Iz ovih jednakosti sleduje $A = D$.
Primetimo da se stav može takođe dokazati pomoću tablica istinitosti.

1.5. PARTITIVNI SKUP

Definicija 1. *Partitivni skup I, u oznaci P(I), je skup svih podskupova skupa I.*

Kako je prazan skup podskup svakog skupa i kako je svaki skup podskup samog sebe, iz gornje definicije sleduje da $\emptyset \in P(I)$ i $I \in P(I)$.

Ako skup I ima n elemenata, partitivni skup će imati 2^n elemenata. Zaista, u partitivni skup ulazi prazan skup, zatim svi jednočlani skupovi kojih ima $\binom{n}{1}$ (broj kombinacija od n elemenata prve klase-videti (5.3)), zatim svi dvočlani skupovi kojih ima $\binom{n}{2}, \ldots$, i najzad svi n-to člani skupovi kojih ima $\binom{n}{n}$. Prema tome, partitivni skup ima $1 + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$ elemenata.

PRIMER 1. Ako je $I = \{a, b, c\}$, partitivni skup će biti

$$P(I) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, I\}.$$

Ovaj skup ima $2^3 = 8$ elemenata.

Sledeći stav dokazuje se bez teškoće.

Stav 1. *Ako su A, B ∈ P(I), tada su A', A ∪ B, A ∩ B takođe elementi skupa P(I).*

Ako se u razmatranjima pojavljuje samo skup I i njegovi podskupovi ponekad se skup I naziva univerzalni skup.

Primetimo da univerzalni skup u različitim slučajevima može biti različit, ali da u toku jedne određene diskusije ne može da se menja.

1.6. UREĐENI PAR

Simboli $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ označavaju isti skup od dva elementa a i b. Uvešćemo sada pojam uređenog para čija je prva projekcija (komponenta) a i druga projekcija (komponenta) b. Taj par označavaćemo (a, b) ili $\langle a, b \rangle$. Smatraćemo da je (a, b) različito od (b, a), osim ako je $a = b$.

Parovi (a, b) i (c, d) jednaki su ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Pojam uređenog para može se definisati na razne načine. Usvojićemo sledeću definiciju:

Definicija 1. *Uređeni par elemenata a i b, u oznaci (a, b), je*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Stav 1. $(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow (a=c)\wedge(b=d)$.

Dokaz. Neka je $(a, b)=(c, d)$, tj. $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$. Da bi ova dva skupa bila jednaka, njihovi elementi moraju biti isti, tj. $\{a\}=\{c\}$ i $\{a, b\}=\{c, d\}$ ili $\{a\}=\{c, d\}$ i $\{c\}=\{a, b\}$.

U prvom slučaju dobijamo iz prve jednakosti $a=c$, pa druga jednakost postaje $\{a, b\}=\{a, d\}$, odakle je $b=d$.

Prva jednakost u drugom slučaju može da nastupi ako i samo ako je $c=d$ i tada mora biti i $a=c=d$. Iz druge jednakosti dobijamo $c=a=b$, pa ovaj slučaj može da nastupi ako i samo ako je $a=b=c=d$.

Ovim smo dokazali implikaciju

$$(a, b)=(c, d) \Rightarrow (a=c)\wedge(b=d).$$

Da važi i obrnuta implikacija proverava se bez teškoće. Ovim je stav 1 dokazan.

Definicija 2. *Uređena trojka (a, b, c) elemenata a, b, c definiše se pomoću jednakosti*

$$(a, b, c)=((a, b), c).$$

Analogno stavu 1 dokazuje se:

Stav 2. $(a_1, b_1, c_1)=(a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1=a_2)\wedge(b_1=b_2)\wedge(c_1=c_2)$.

Slično se definiše uređena n-torka $(a_1, \ldots, a_n)$, koja se označava i $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.

Uređeni par i uopšte uređena n-torka mogu imati jednake elemente. Na primer, (a, b, a) i (a, a, b) su dve različite uređene trojke osim ako je $a=b$, dok su skupovi $\{a, b, a\}$, $\{a, a, b\}$ i $\{a, b\}$ jednaki.

1.7. DEKARTOV PROIZVOD

Definicija 1. *Dekartov ili kombinovani proizvod dva skupa X i Y je skup Z čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa X i drugom iz skupa Y, tj.*

$$Z=X\times Y=\{(x, y)\mid x\in X\wedge y\in Y\}.$$

Dekartov proizvod nije u opštem slučaju komutativna operacija, tj.

$$X\times Y\neq Y\times X.$$

PRIMER 1. Dokažimo da važi implikacija

$$A\times B\subset X\times Y \Rightarrow A\subset X\wedge B\subset Y,$$

gde su A i B neprazni skupovi. Neka skup B sadrži element b. Tada za svako $a\in A$ je $(a, b)\in A\times B$, pa je i $(a, b)\in X\times Y$. Prema tome, imamo $(a, b)=(x, y)$ za jedno $x\in X$ i jedno $y\in Y$, pa mora biti $a=x$ za jedno $x\in X$, dakle $A\subset X$. Slično se dokazuje da je $B\subset Y$.

Definicija Dekartovog proizvoda analogno se prenosi i na slučajeve kada imamo više od dva skupa. Tako je Dekartov proizvod tri skupa X, Y, Z definisan sa

$$X\times Y\times Z=\{(x, y, z)\mid x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\},$$

a Dekartov proizvod od n skupova $X_1, \ldots, X_n$ je

$$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1, \ldots, x_n)\mid x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\}.$$

Dekartovi proizvodi $X\times X, X\times X\times X, \ldots$ obeležavaju se redom sa $X^2, X^3, \ldots$

1.8. BINARNA RELACIJA

Definicija 1. *Ako su X i Y dva skupa, binarna relacija u skupu $X\times Y$ je svaki njegov podskup.*

Ako je $X=Y$, relacija u skupu $X\times Y=X\times X=X^2$ zove se i relacija u skupu X.

PRIMER 1. Neka je $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$. Tada je

$$X\times Y=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

U posmatranom skupu $X\times Y$ relacije su, na primer,

(a) $\{(1, 1), (3, 2), (4, 1)\}$;

(b) $\{(3, 1), (4, 2), (3, 3), (4, 1)\}$.

Takođe su relacije u skupu $X\times Y$

(c) $\{(x, y)\mid x=y\}=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

(d) $\{(x, y)\mid x<y\}=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$;

(e) $\{(x, y)\mid y-x=2\}=\{(1, 3)\}$;

(f) $\{(x, y)\mid y=x^2+3\}=\emptyset$;

(g) $\{(x, y)\mid y\mid x\}=\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$;

(h) $\{(x, y)\mid y\geq x^2\}=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Definicija 2. *Neka je ρ binarna relacija u skupu $X\times Y$. Kažemo da je x u relaciji ρ sa y (u oznaci $x\rho y$) ako je $(x, y)\in\rho$.*

Dakle, $(x, y)\in\rho \Leftrightarrow x\rho y$.

Slično je $(x, y)\notin\rho \Leftrightarrow x$ non $\rho\, y$.

PRIMER 2. Relacije $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ su binarne relacije u skupu realnih brojeva **R**.

Definicija 3. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je refleksivna ako je*

$$(\forall a\in S) \quad a\rho a.$$

Definicija 4. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je simetrična ako je*

$$(\forall a, b\in S) \quad a\rho b \Rightarrow b\rho a.$$

Definicija 5. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je antisimetrična ako je*

$$(\forall a, b\in S) \quad a\rho b\wedge b\rho a \Rightarrow a=b.$$

Definicija 6. *Neka je ρ binarna relacija u skupu S. Relacija ρ je tranzitivna ako je*

$$(\forall a, b, c\in S) \quad a\rho b\wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c.$$

Opštije od definicije 1 daje se sledeća:

Definicija 7. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ dati skupovi. Relacija dužine n u skupu $X_1\times\cdots\times X_n$ je svaki podskup skupa $X_1\times\cdots\times X_n$.*

1.9. RELACIJA EKVIVALENTNOSTI

Definicija 1. *Neka je S proizvoljan skup i ρ jedna relacija u skupu S. Relacija ρ zove se relacija ekvivalentnosti ako je relacija:* 1° *refleksivna,* 2° *simetrična i* 3° *tranzitivna.*

PRIMER 1. Jednakost je relacija ekvivalentnosti jer je ova relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

PRIMER 2. Na skupu $S=\{a, b, c, \ldots\}$ pravih $a, b, c, \ldots$ u Euklidovoj ravni posmatrajmo relaciju paralelnosti $\|$.

Budući da je $x \| x$ za svako $x \in S$, relacija paralelnosti je refleksivna.

Ako je $a \| b$, tada je i $b \| a$, što znači da je paralelnost simetrična relacija.

Ako je $a \| b$ i $b \| c$, tada je $a \| c$, što znači da paralelnost ima osobinu tranzitivnosti.

Prema tome, relacija paralelnosti je relacija ekvivalentnosti.

PRIMER 3. Na skupu $S=\{a, b, c, \ldots\}$ pravih $a, b, c \ldots$ u Euklidovoj ravni uočimo relaciju normalnosti $\perp$.

Budući da relacija $\perp$ od osobina 1°, 2° i 3° ima samo osobinu simetričnosti, ona nije relacija ekvivalentnosti.

PRIMER 4. Na skupu N prirodnih brojeva posmatrajmo relaciju $a|b$ (a se sadrži u b bez ostatka), gde je $a, b \in \mathbf{N}$. Ova relacija je refleksivna, jer je $x|x$ za svako $x \in \mathbf{N}$.

Relacija $|$ je tranzitivna jer $(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$.

Međutim, ova relacija nije relacija ekvivalentnosti jer nema osobinu simetričnosti.

PRIMER 5. Na skupu Z celih brojeva uočimo relaciju kongruentnosti

$$a \equiv b \pmod m \quad (m \text{ ceo broj} \neq 0),$$

koja izražava činjenicu da je razlika $a-b$ deljiva bez ostatka sa m.

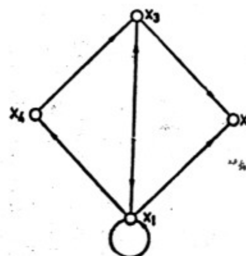
Ako a i b nisu kongruentni, piše se $a \not\equiv b \pmod m$.

Ova relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. kongruentnost je relacija ekvivalentnosti.

1.10. GRAFOVI[1]

Definicija 1. *Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija u X. Uređen par $G=(X, \rho)$ se naziva graf. Elementi skupa X su čvorovi grafa a elementi skupa ρ grane grafa.*

Graf se može očigledno predstaviti crtežom na sledeći način. Čvorove grafa $x_1, \ldots, x_n (\in X)$ predstavljamo proizvoljnim međusobno različitim tačkama u ravni. Ako je $(x_i, x_j) \in \rho$, tačku koja predstavlja čvor x_i spajamo neprekidnom, glatkom linijom sa tačkom koja predstavlja čvor x_j. Ova linija se orijentiše na crtežu strelicom u smeru od x_i ka x_j. Ako $(x_i, x_j) \notin \rho$, čvorovi x_i i x_j nisu na crtežu direktno povezani.



Sl. 1.9.1.

Ako paru čvorova x_i, x_j odgovaraju dve grane (x_i, x_j) i (x_j, x_i), na crtežu se obično ne povlače dve linije između čvorova x_i i x_j nego se jedinstvena linija dvostrano orijentiše. Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se petlja.

PRIMER 1. Neka je

$$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ i } \rho=\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}.$$

Graf $G=(X, \rho)$ je predstavljen na sl. 1.9.1.

Definicija 2. *Graf $G=(X, \rho)$ je simetričan ili neorijentisan ako je ρ simetrična relacija. Ako je tada $(x_i, x_j) \in \rho$, kaže se da su x_i i x_j susedni čvorovi. Stepen d_i čvora x_i je jednak broju čvorova koji su susedni čvoru x_i.*

Kod neorijentisanih grafova sve grane su dvostrano orijentisane (u stvari neorijentisane), pa se strelice na crtežu izostavljaju. Neorijentisani grafovi mogu ali ne moraju imati petlje.

[1] D. CVETKOVIĆ je izradio 1.10.

Definicija 3. *Graf $G=(X, \rho)$ je antisimetričan ili orijentisan ako je ρ antisimetrična relacija.*

PRIMER 2. Na nekom turniru učestvuje n takmičara koji su numerisani brojevima $1, \ldots, n$. Takmičari se bore svaki sa svakim i nijedna borba se ne završava nerešeno. Ovakav turnir možemo predstaviti orijentisanim grafom sa n čvorova u kojem iz čvora x_i vodi grana u čvor x_j ako i samo ako je takmičar i pobedio takmičara j.

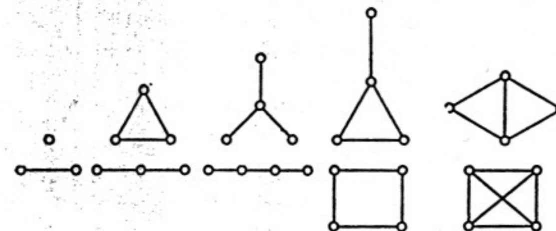
Definicija 4. *Neka je X neprazan skup i U jedna kombinacija sa ponavljanjem[1] skupa $X \times X$. Uređen par $G=(X, U)$ naziva se multigraf.*

Multigraf je u stvari graf u kome je dozvoljena egzistencija višestrukih grana. Graf je specijalan slučaj multigrafa. Definicije čvora, grane, itd. prenose se i na multigrafove.

Definicija 5. *Multigraf $G=(X, U)$ je konačan ako je skup X konačan.*

Pojam grafa se pojavljuje u mnogim naučnim disciplinama a posebno u elektrotehnici i kompjuterstvu. Grafom se mogu, na primer, predstaviti mreže puteva ili železničkih pruga, mreže telekomunikacija, električne šeme, programi za kompjutere, itd.

Na sl. 1.9.2 predstavljeni su svi povezani, neorijentisani grafovi bez petlji sa najviše četiri čvora.


Sl. 1.9.2.

PRIMEDBA 1. Kaže se da je neorijentisan graf povezan ako i samo ako se kretanjem po granama grafa može preći iz proizvoljnog čvora u bilo koji drugi čvor grafa.

1.11. PRESLIKAVANJE ILI FUNKCIJA

Definicija 1. *Ako su X i Y dva skupa, pod preslikavanjem (funkcijom) f skupa X u skup Y podrazumeva se jedan podskup skupa $X \times Y$ takav da se svako $x \in X$ javlja samo jedanput kao prva komponenta u elementima navedenog podskupa.*

Ovo se simbolizuje

$$f: X \to Y, \quad \text{ili} \quad f: (x, y) \ (x \in X, y \in Y).$$

Ako je $(x, y) \in f$, tada se x (prva komponenta) naziva original i y (druga komponenta) slika, koja se takođe označava sa $y=f(x)$; x se često zove i nezavisna promenljiva i y zavisna promenljiva.

Na osnovu definicije 1, ako je f preslikavanje skupa X u skup Y, važi implikacija

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

U poslednje vreme preovlađuje burbakistička oznaka $x \mapsto f(x)$ koja izražava da funkcija f pridružuje elementu x iz X element $f(x)$ iz Y.

[1] Videti Uvod, 5.6.

Definicija 2. *Ako je $f:X\to Y$, tada se X zove definicioni skup ili domen preslikavanja, a skup svih slika $f(x)$ skup vrednosti preslikavanja, ili kodomen.*

Skup vrednosti preslikavanja označava se sa $f(X)$. Uopšte, ako $A\subset X$, tada $f(A)$ označava skup svih slika $f(x)$ onih elemenata x koji pripadaju skupu A.

Posebno, uvek je $f(\emptyset)=\emptyset$.

Ako se skup $f(X)$ sastoji samo od jednog elementa, preslikavanje (funkcija) se naziva konstanta.

Skup Γ svih uređenih parova $(x, f(x))$ naziva se graf funkcije f. Prema tome

$$\Gamma=\{(x, f(x))\mid x\in X\},$$

gde je X definicioni skup.

Često se realne funkcije realne promenljive ispituju pomoću grafova na taj način što se u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy konstruišu uređeni parovi $(x, f(x))$.

Definicija 3. *Funkcija f se naziva numerička funkcija ako su definicioni skup i skup vrednosti preslikavanja skupovi brojeva.*

Primer 1. Ako je $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{0, 2\}$, tada je

$$X\times Y=\{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\}.$$

Podskup $\{(1, 0), (2, 2), (3, 0), (4, 0)\}$ je funkcija, i to numerička.

Podskup $\{(1, 0), (1, 2)\}$ nije funkcija.

Primer 2. Neka je X skup svih kvadratnih matrica[1] drugog reda, tj.

$$X=\left\{x \,\middle|\, x=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d\end{Vmatrix} \quad (a, b, c, d\in \mathbf{C})\right\}.$$

Preslikavanje det skupa X na skup $\mathbf{C}$, definisano sa

$$\det x=ad-bc$$

je numerička funkcija.

Primetimo da se često, kada se kaže funkcija, misli na numeričku funkciju.

Stav 1. *Ako preslikavanja f i g imaju isti domen i ako je $f(x)=g(x)$ za svako x iz navedenog domena, tada je $f=g$.*

Dokaz. Neka je $(x, y)\in f$. Tada je, prema definiciji 2, $y=f(x)$. Kako, po pretpostavci, f i g imaju iste domene, zaključujemo da x pripada domenu preslikavanja g. Odavde izlazi $(x, z)\in g$ za neko z i $z=g(x)$. Kako je, po pretpostavci $f(x)=g(x)$, dobijamo $(x, y)=(x, z)$. Dakle, $(x, y)\in g$ i $f\subset g$.

Ako sada pretpostavimo da $(x, y)\in g$, istim rezonovanjem dolazimo do $g\subset f$.

Dakle, dokazali smo da je $f=g$, jer je

$$f\subset g\wedge g\subset f\Leftrightarrow f=g.$$

Definicija 4. *Neka je $f:X\to Y$. Ako je $f(X)=Y$, kažemo da je f preslikavanje skupa X na skup Y, ili da je f surjekcija od X na Y.*

Primer 3. Preslikavanje f dato sa

$$f(x)=x^3 \quad (X=\mathbf{R},\ Y=\mathbf{R}),$$

gde je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, je preslikavanje skupa $\mathbf{R}$ na sebe samog.

[1] O pojmu matrice videti odeljak 1. „Matrice" u poglavlju Linearna algebra.

Primer 4. Preslikavanje f dato sa

$$f(x)=x^2 \quad (X=\mathbf{R},\ Y=\mathbf{R}^+\cup\{0\}),$$

gde je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva i $\mathbf{R}^+$ skup realnih pozitivnih brojeva, je preslikavanje skupa $\mathbf{R}$ na skup $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

Definicija 5. *Neka je $f:X\to Y$. Ako važi implikacija $f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$, kažemo da je f injekcija (injektivno preslavanje).*

Definicija 6. *Neka je $f:X\to Y$. Ako je f surjektivno i injektivno preslikavanje tada je f biunivoko (obostrano-jednoznačno) preslikavanje. Ovakvo preslikavanje naziva se i bijekcija.*

Definicija 7. *Neka je $f:X\to Y$ i $g:Y\to Z$. Pod proizvodom (kompozicijom) preslikavanja f i g smatra se preslikavanje $h:X\to Z$ određeno pomoću*

(1) $\quad h(x)=g(f(x)) \quad (x\in X).$

Preslikavanje h označava se takođe fg, te se (1) predstavlja u obliku

$$(fg)(x)=g(f(x)).$$

Primetimo da je pri definiciji proizvoda fg prirodno pretpostaviti da se prvo primenjuje preslikavanje f a zatim g. Ali onda moramo staviti $(fg)(x)=g(f(x))$ zbog načina označavanja slike pri nekom preslikavanju. U ovoj relaciji prividno dolazi do zamene redosleda f i g. Da bi se izbegla ta zamena, često se umesto oznake $f(x)$ za sliku elementa x koristi oznaka $(x)f$. Tada se definiciona relacija preslikavanja fg može izraziti u obliku $(x)(fg)=((x)f)g$, gde je redosled slova f i g sačuvan.

Primer 5. Ako $X=Y=Z=\mathbf{R}$ i ako je $f(x)=x^3$, $g(x)=\sin x$, tada je $(fg)(x)=\sin(x^3)$.

Stav 2. *Ako je $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to U$, tada je $(fg)h=f(gh)$, tj. za proizvod preslikavanja važi asocijativni zakon.*

Dokaz. Na osnovu definicije proizvoda (kompozicije) dve funkcije zaključujemo da je

$$fg:X\to Z \quad \text{i} \quad gh:Y\to U.$$

Odavde sleduje da obe funkcije $(fg)h$ i $f(gh)$ preslikavaju X u U. Kako je za svako x

$$((fg)h)(x)=h((fg)(x))=h\big(g(f(x))\big)=(gh)(f(x))=(f(gh))(x),$$

na osnovu stava 1 zaključujemo da je $(fg)h=f(gh)$.

Definicija 8. *Preslikavanje $f:X\to X$, definisano sa $f(x)=x$ za svako $x\in X$, naziva se identičnim preslikavanjem skupa X.*

Definicija 9. *Ako je $f:X\to Y$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}:f(X)\to X$, takvo da je ff^{-1} identično preslikavanje skupa X i da je $f^{-1}f$ identično preslikavanje skupa $f(X)$, tada preslikavanje f^{-1} nazivamo inverzno preslikavanje preslikavanja f.*

Stav 3. *Ako je $f:X\to Y$ biunivoko preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje i ono je jedinstveno.*

Dokaz. Neka biunivoko preslikavanje f ima dva inverzna preslikavanja g i h. Tada su gf i hf identična preslikavanja skupa $f(X)$, tj.

$$(\forall y \in f(X)) \quad (gf)(y) = (hf)(y) = y,$$

$$(\forall y \in f(X)) \quad f(g(y)) = f(h(y)) = y.$$

Odavde na osnovu definicije biunivokog preslikavanja, sleduje

$$(\forall y \in f(X)) \quad g(y) = h(y), \quad \text{tj.} \quad g = h.$$

Kao što smo videli, preslikavanje $g = f^{-1}$ treba da ispunjava uslov

(2) $$(\forall y \in f(X)) \quad f(g(y)) = y.$$

Prema tome, $g(y)$ je original elementa $y \in f(X)$ pri preslikavanju f. Na osnovu definicije biunivokog preslikavanja, svaki element $y \in f(X)$ ima samo jedan original. Zato relacija (2) jednoznačno definiše $g(y)$.

Treba još proveriti da li je fg identično preslikavanje skupa X. Kako je

$$(fg)(x) = g(f(x)),$$

i kako je, po definiciji, $g(y)$ original elementa y za preslikavanje f, zaključujemo da je $g(f(x))$ original elementa $f(x)$ pri preslikavanju f, a taj original je x. Dakle, $g(f(x)) = x$ i fg je identično preslikavanje skupa X.

1.12. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

Definicija 1. *Beskonačan skup S naziva se prebrojivim ako postoji biunivoko preslikavanje skupa S na skup prirodnih brojeva* $\mathbf{N}$.

Ovoj definiciji ekvivalentna je:

Definicija 2. *Beskonačan skup S naziva se prebrojivim ako se može predstaviti kao niz $x_1, \ldots, x_n, \ldots$*

Činjenica da se S biunivoko preslikava na $\mathbf{N}$, tj. da je S u biunivokoj korespondenciji sa $\mathbf{N}$, simbolizuje se $S \leftrightarrow \mathbf{N}$.

Ako su S i T prebrojivi skupovi, tada se između njih može uspostaviti biunivoka korespondencija, tj.

$$S \leftrightarrow \mathbf{N} \wedge T \leftrightarrow \mathbf{N} \Rightarrow S \leftrightarrow T.$$

Stav 1. *Skup* $\mathbf{Z}$ *svih celih brojeva je prebrojiv.*

Dokaz. Tvrđenje stava sleduje iz činjenice da se skup $\mathbf{Z}$ može prikazati u obliku niza

$$0, \ -1, \ +1, \ -2, \ +2, \ldots, \ -n, \ +n, \ldots$$

Stav 2. *Skup* $\mathbf{Q}$ *svih racionalnih brojeva je prebrojiv.*

Dokaz. Daćemo skicu CANTOROVOG dokaza. Neka je racionalan broj dat u obliku $\frac{p}{q}$. Prvo ćemo napisati sve racionalne brojeve za koje je $p+q=1$, zatim one za koje je $p+q=2$ i koji nisu do sada napisani, zatim one za koje je $p+q=3$ i koji nisu još napisani i tako dalje. Pri tome ćemo broju p redom davati vrednosti 0, 1, 2, 3, ... i izračunavati odgovarajuće vrednosti za q. Na taj način dobijamo niz

$$\frac{0}{1}; \ \frac{1}{1}; \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{1}; \ \frac{1}{3}, \ \frac{3}{1}; \ \frac{1}{4}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{1}; \ \frac{1}{5}, \ \frac{5}{1}; \ \frac{1}{6}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{6}{1}; \ldots$$

Kako smo skup racionalnih brojeva uspeli da predstavimo u obliku niza, dokazali smo njegovu prebrojivost.

Sledeći stav navodimo bez dokaza.

Stav 3. *Skup svih algebarskih brojeva je prebrojiv.*

Dokazaćemo sada:

Stav 4. *Skup svih realnih brojeva koji pripadaju intervalu (a, b) nije prebrojiv.*

Dokaz. Daćemo CANTOROV dokaz gornjeg stava zadržavajući se na intervalu $(0, 1)$, čime se ne umanjuje opštost navedenog stava.

Svaki od brojeva intervala $(0, 1)$ može se predstaviti u obliku beskonačnog decimalnog razlomka. Pri tome to predstavljanje je jedinstveno sa izuzetkom realnih brojeva koji se mogu predstaviti u obliku konačnog decimalnog razlomka. Ovakvi brojevi mogu se predstaviti na dva načina. Tako, na primer, broj 0.35 možemo predstaviti na dva načina: $0.35\dot{0}$ i $0.34\dot{9}$, gde tačka iznad poslednje cifre označava da broj ima beskonačno mnogo decimala i da su sve cifre koje sleduju iste kao i cifra iznad koje se nalazi tačka. U prvom od ovih načina sve cifre počev od jednog mesta su nule, a u drugom načinu pisanja sve cifre počev od jednog mesta su devetke. Upotrebljavaćemo samo prvi način pisanja.

Pretpostavimo sada da je skup svih realnih brojeva koji pripadaju intervalu (a, b) prebrojiv. Drugim rečima, pretpostavljamo da se skup svih realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$ može predstaviti u obliku niza $x_1, x_2, \ldots$ Neka je n-ti broj u tom nizu predstavljen u obliku

(1) $$x_n = 0.\, a_{1n} a_{2n} \ldots a_{nn} \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pri čemu prvi indeks označava numeru decimalnog mesta, a drugi indeks-mesto posmatranog decimalnog broja u nizu $x_1, x_2, \ldots$ Saglasno učinjenoj pretpostavci nije mogućno da sve cifre počevši od jedne budu jednake 9.

Dokazaćemo da postoji broj koji se nalazi u intervalu $(0, 1)$, a ne nalazi se u nizu $x_1, x_2, \ldots$ Uočimo cifre $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots$ i broj

(2) $$b = 0.\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

gde je

(3) $$a_i = a_{ii} + 1 \quad (a_{ii} \leq 7), \quad a_i = 7 \quad (a_{ii} = 8), \quad a_i = 8 \quad (a_{ii} = 9).$$

Ako bi broj b, dat sa (2), bio jednak n-tom članu niza $x_1, x_2, \ldots$, trebalo bi da na n-tom mestu u razvoju broja b bude cifra a_{nn} dok na osnovu (3) imamo cifru $a_n \neq a_{nn}$.

Ovim je stav dokazan.

Kako smo dokazali da važi stav 4, utoliko pre će važiti:

Stav 5. *Skup svih realnih brojeva nije prebrojiv.*

1.13. KARDINALNI BROJ

Definicija 1. *Za dva skupa (konačna ili beskonačna) kaže se da imaju isti kardinalni broj (istu potenciju) ako je između njih moguće uspostaviti biunivoku korespondenciju.*

Rećićemo da skup A ima veći kardinalni broj nego skup B ako se između skupa B i nekog skupa C ($C \subset A$, $C \neq A$) može uspostaviti obostrano-jednoznačna korespondencija, a da se istovremeno ne može uspostaviti obostrano-jednoznačna korespondencija između skupa A i bilo kog skupa D ($D \subset B$).

Jednakost kardinalnih brojeva u slučaju konačnih skupova izražava činjenicu da posmatrani skupovi imaju jednak broj elemenata.

Iz date definicije sleduje da svi prebrojivi skupovi imaju jednake kardinalne brojeve.

Definicija 2. *Skupovi A i B čiji su kardinalni brojevi jednaki nazivaju se ekvivalentni i piše se $A \sim B$.*

Bez teškoće se proverava da je relacija ekvivalentnosti dva skupa jedna relacija ekvivalentnosti, tj. da važi

$$A \sim A; \qquad A \sim B \Rightarrow B \sim A; \qquad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

Stav 1. *Svaki podskup prebrojivog skupa je ili konačan ili prebrojiv.*

Dokaz. Neka je A prebrojiv skup i B ma koji podskup skupa A. Kako je skup A prebrojiv njegovi elementi se mogu predstaviti u obliku

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

Među ovim elementima nalaze se i elementi skupa B jer je $B \subset A$. Neka su to elementi

(1) $$a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, \ldots$$

pri čemu su $i_1, \ldots, i_k, \ldots$ prirodni brojevi i $i_1 < \cdots i_k < \cdots$

Ako se niz (1) prekida posle konačnog broja koraka, tada je skup B konačan. Ako je niz (1) beskonačan, stavljajući $a_{i_k} = b_k$, imamo

$$b_1, \ldots, b_k, \ldots$$

tj. skup B je prebrojiv.

Stav 2. *Svaki beskonačan skup, prebrojiv ili neprebrojiv, sadrži uvek bar jedan prebrojiv podskup.*

Dokaz. Ako je A prebrojiv skup, stav je dokazan jer je $A \subset A$. Pretpostavimo sada da je A neprebrojiv skup. Uzmimo bilo koji element a_1 toga skupa. Ovim skup nije iscrpljen jer bi inače bio konačan. Izaberimo sada neki drugi element a_2 skupa A, čime se takođe ne iscrpljuje skup A. Prema tome, možemo izabrati ponovo neki element a_3 i tako dalje. Ovim postupkom dolazimo do skupa

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

koji je prebrojiv i koji se sadrži u A.

Posledica stavova 1 i 2 je da svaki neprebrojiv skup ima veći kardinalni broj od proizvoljnog prebrojivog skupa.

Prema tome, postoje beskonačni skupovi koji imaju različite kardinalne brojeve. Takvi su, na primer, skup realnih brojeva (koji je neprebrojiv) i skup racionalnih brojeva (koji je prebrojiv).

Biunivoko preslikavanje između konačnih skupova ima neke osobine različite od biunivokog preslikavanja između beskonačnih skupova. Tako, na primer, nije moguće uspostaviti biunivoko preslikavanje između jednog konačnog skupa i nekog njegovog pravog podskupa. Za beskonačne skupove ovo može da važi, što se, na primer, vidi iz sledećeg stava.

Stav 3. *Moguće je uspostaviti biunivoko preslikavanje između skupa svih realnih brojeva i proizvoljnog intervala (a, b).*

Dokaz. Neka na brojnoj osi tačkama A i B respektivno odgovaraju brojevi a i b. U tačkama A i B dignimo normale na brojnu osu i sa iste strane brojne ose nanesimo duži $\frac{a+b}{2}$. Na taj način dobijamo tačke A' i B'. Nad duži $A'B'$ kao nad prečnikom konstruišimo krug. On dodiruje brojnu osu. Svakoj tački X brojne ose pridružimo tačku Y kruga koja se dobija u preseku kruga i prave koja prolazi kroz centar kruga i tačku X. Zatim projektujmo tačku Y na brojnu osu. Na taj način dobijamo tačku Y' koja pripada intervalu (a, b). Na ovaj način je uspostavljeno biunivoko preslikavanje između tačaka brojne ose sa jedne strane i tačaka intervala (a, b) sa druge strane.

Mogu se dokazati i drugi, na prvi pogled paradoksalni, stavovi koji su u vezi sa kardinalnim brojevima pojedinih skupova. Tako, na primer, važi:

Stav 4. *Skup svih tačaka prave i skup svih tačaka ravni imaju jednake kardinalne brojeve.*

1.14. BINARNA OPERACIJA

Definicija 1. *Binarna operacija u jednom skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ je jedno preslikavanje skupa $S \times S$ u skup S.*

Binarna operacija zove se takođe: binarna kompozicija ili apstraktna operacija ili samo operacija.

Znak koji kazuje da na elemente a i b skupa S treba primeniti određeni postupak da bi se dobio element c i tog skupa, zove se operator i često označava sa $\circ$. Rezultat operacije $\circ$ koja je izvršena sa elementima a i b označava se $a \circ b = c$.

Definicija 2. *Skup S u kome je definisana binarna operacija $\circ$ naziva se grupoid. Grupoid se označava sa $(S, \circ)$.*

Za operacije koje imaju konkretan smisao, operator $\circ$ zamenjuje se znacima:

$+$ za sabiranje (brojeva, polinoma, vektora, itd.);

$-$ za oduzimanje (brojeva, polinoma, vektora, itd.);

$\times$ ili $\cdot$ za množenje (brojeva, polinoma, itd.);

$:$ ili $/$ za deljenje (brojeva, polinoma, itd.);

$\cup$ za uniju skupova;

$\cap$ za presek skupova;

$\setminus$ za diferenciju skupova;

$\vdots$

Binarna operacija koju smo definisali je interna operacija. Tako, na primer, operacija vektorsko sabiranje koja, primenjena na par $(\vec{a}, \vec{b})$ vektora u EUKLIDOVOM prostoru sa tri dimenzije $\mathbf{R}^3$, daje vektor koji pripada istom prostoru. Stoga je to binarna kompozicija definisana svuda u $\mathbf{R}^3$.

Međutim, operacija skalarno množenje vektora nije interna operacija jer ona paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ koji pripadaju prostoru $\mathbf{R}^3$ dodeljuje broj koji pripada skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$.

Opštije od definicije 1 daje se sledeća definicija:

Definicija 3. *n-arna operacija u jednom skupu $S=\{a, b, c, \ldots\}$ je jedno preslikavanje skupa S^n u skup S, gde je n prirodan broj.*

Ako je $n=1$, takva operacija naziva se unarna operacija.

Svi zakoni kompozicije nisu svuda definisani na skupu S. Tako, na primer, na skupu pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+$, operacija oduzimanje, primenjena na par $(a, b)\,(a, b\in\mathbf{R}^+)$ daje element $a-b$ koji pripada skupu $\mathbf{R}^+$ samo za $a>b$.

Na skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, operacija deljenje, primenjena na par $(a, b)\,(a, b\in\mathbf{N})$ dovodi do elementa $\frac{a}{b}$ koji pripada skupu $\mathbf{N}$ samo ako se b sadrži u a.

Stoga se pored interne kompozicije (operacije) definiše na skupu S i eksterni zakon kompozicije.

Definicija 4. *Neka je Ω skup elemenata $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ koje ćemo zvati operatori, i neka je S skup elemenata $a, b, c, \ldots$*

Kaže se da je između elemenata skupa Ω i elemenata skupa S definisana eksterna kompozicija, ako svakom paru $(\alpha, a)\,(\alpha\in\Omega, a\in S)$ odgovara po nekom zakonu jedan element skupa S.

Ako je, na primer, Ω skup svih realnih brojeva i S skup svih slobodnih vektora, paru $(\alpha, \vec{a})$ pridružuje se vektor $\alpha\vec{a}$ (proizvod skalara i vektora). Ovaj vektor pripada skupu S.

1.15. OSOBINE BINARNIH OPERACIJA

1.15.1. ASOCIJATIVNOST

Definicija 1. *Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka tri elementa $a, b, c\in S$ važi*

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c),$$

kaže se da je operacija $\circ$ asocijativna na skupu S i zajednički rezultat izraza

$$(a\circ b)\circ c \quad i \quad a\circ(b\circ c)$$

označava se

$$a\circ b\circ c.$$

Definicija 2. *Grupoid $(G, \circ)$ u kome je operacija $\circ$ asocijativna naziva se polugrupa (ili semigrupa).*

1.15.2. KOMUTATIVNOST

Definicija 1. *Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka dva elementa $a, b\in S$ važi jednakost*

$$a\circ b=b\circ a,$$

kaže se da je operacija $\circ$ komutativna na S.

1.15.3. NEUTRALNI ELEMENT

Definicija 1. *Ako u grupoidu $(S, \circ)$ postoji takav element $e\in S$ za koji je*

$$(\forall a\in S)\ a\circ e=e\circ a=a,$$

on se zove neutralni ili jedinični element.

Stav 1. *Ako postoji neutralni element e za operaciju $\circ$, on je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva neutralna elementa: e i e_1 $(e\neq e_1)$. Tada bi bilo

$$e\circ e_1=e_1\circ e=e \wedge e_1\circ e=e\circ e_1=e_1 \Rightarrow e=e_1.$$

Ovo je u kontradikciji sa hipotezom $e\neq e_1$. Prema tome, stav 1 je dokazan.

1.15.4. REGULARNI ELEMENTI

Jednakost $b=c$, koja izražava identičnost dva elementa skupa S, povlači

$$(\forall a\in S)\quad a\circ b=a\circ c \quad i \quad b\circ a=c\circ a.$$

Međutim, ne možemo tvrditi da važi obrnuto, tj. da je

(1) $a\circ b=a\circ c \Rightarrow b=c,$

(2) $b\circ a=c\circ a \Rightarrow b=c.$

Definicija 1. *Ako za svaki par $b, c\in S$ važi implikacija (1), kažemo da je a levo regularan element za posmatranu operaciju.*

Ako za svaki par $b, c\in S$ važi implikacija (2), kažemo da je a desno regularan element za operaciju $\circ$.

Element a je regularan za operaciju $\circ$ ako je i levo i desno regularan za tu operaciju.

PRIMER 1. Za operaciju množenje na skupu $\mathbf{Z}$ celih brojeva svi elementi osim 0 su regularni. Nula nije ni levo ni desno regularan element.

Stav 1. *Ako za jednu operaciju postoji neutralni element, on je regularan.*

Dokaz. Neka je e neutralni element za operaciju $\circ$ u skupu S. Ako su $a, b\in S$, tada je

$$a\circ e=b\circ e \Rightarrow a=b,$$

$$e\circ a=e\circ b \Rightarrow a=b.$$

Ovim je stav 1 dokazan.

1.15.5. SIMETRIČNI ELEMENTI

Definicija 1. *Neka grupoid $(S, \circ)$ ima neutralni element e. Kažemo da element $a \in S$ ima levo simetrični element $a' \in S$ za operaciju $\circ$ ako važi jednakost*

(1) $a' \circ a = e$.

Kažemo da element $a \in S$ ima desno simetrični element $a' \in S$ za operaciju $\circ$ ako važi jednakost

(2) $a \circ a' = e$.

Element $a \in S$ ima simetrični element a' za operaciju $\circ$ ako i samo ako važe jednakosti (1) i (2).

Element simetričan elementu a takođe se naziva inverzan element elementu a i označava još a^{-1}.

Stav 1. *Neka je $\circ$ asocijativna operacija na skupu S za koju postoji neutralni element $e \in S$. Da bi element $a \in S$ imao simetrični element iz S on mora imati jedan levo simetrični element i jedan desno simetrični element; tada a ima jedan jedini simetrični element iz S i taj element je istovremeno jedini levi simetrični i jedini desni simetrični element za a.*

Dokaz. Neka je a' $(a' \in S)$ jedan levo simetrični i a'' $(a'' \in S)$ jedan desno simetrični element za operaciju $\circ$ na skupu S. Tada je $a' \circ a = a \circ a'' = e$. Iz ovih jednakosti, na osnovu asocijativnosti operacije $\circ$, dobijamo

$$a'' = e \circ a'' = (a' \circ a) \circ a'' = a' \circ (a \circ a'') = a' \circ e = a'.$$

Prema tome, svaki desno simetrični element jednak je sa svakim levo simetričnim elementom, pa su prema tome i svi međusobno jednaki. Ovim smo dokazali stav.

Stav 2. *Ako je operacija $\circ$ asocijativna i ako element $a \in S$ ima simetrični element $a' \in S$, tada je a regularan element za operaciju $\circ$.*

Dokaz. Da bi a bio regularan element za operaciju $\circ$, moraju da važe implikacije (videti definiciju 1 u 1.14.4)

$$(\forall b, c \in S) \quad a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c,$$

$$(\forall b, c \in S) \quad b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c.$$

Kako je

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow a' \circ (a \circ b) = a' \circ (a \circ c),$$

i kako je operacija $\circ$ asocijativna, dobijamo

$$(a' \circ a) \circ b = (a' \circ a) \circ c.$$

Budući da su elementi a i a' simetrični, poslednja jednakost postaje

$$e \circ b = e \circ c \Rightarrow b = c.$$

Takođe je

$$b \circ a = c \circ a \Rightarrow (b \circ a) \circ a' = (c \circ a) \circ a'$$
$$\Rightarrow b \circ (a \circ a') = c \circ (a \circ a') \text{ (jer je operacija } \circ \text{ asocijativna).}$$

Kako su elementi a i a' simetrični, imamo

$$b \circ e = c \circ e \Rightarrow b = c.$$

Ovim smo dokazali stav 2.

Stav 3. *Neka je dat grupoid $(S, \circ)$ u kome je operacija $\circ$ asocijativna. Ako je a' simetrični element za a i b' simetrični element za b $(a, a' b, b' \in S)$, tada i $a \circ b$ ima simetričan element i važi jednakost*

$$(a \circ b)' = b' \circ a'.$$

Dokaz. Tvrđenje stava proizlazi iz sledećih jednakosti:

$$(b' \circ a') \circ (a \circ b) = b' \circ (a' \circ a) \circ b = b' \circ e \circ b = b' \circ b = e,$$

$$(a \circ b) \circ (b' \circ a') = a \circ (b \circ b') \circ a' = a \circ e \circ a' = a \circ a' = e.$$

1.16. POJAM GRUPE

Definicija 1. *Kaže se da grupoid $(G, \circ)$ ima strukturu grupe, ili da čini grupu, ako operacija $\circ$ ima osobine:*

1° *operacija je asocijativna:*

$$(\forall a, b, c \in G) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

2° *operacija ima neutralni element e $(\in G)$:*

$$(\exists e \in G), \quad (\forall a \in G) \quad a \circ e = e \circ a = a;$$

3° *svaki element a $(\in G)$ ima simetrični element a' $(\in G)$ za operaciju $\circ$:*

$$(\forall a \in G) \quad (\exists a' \in G) \quad a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Ako je $(G, \circ)$ grupa, kaže se da elementi skupa G obrazuju grupu.

Definicija 2. *Ako je $(G, \circ)$ grupa i ako je operacija $\circ$ komutativna:*

$$(\forall a, b \in G) \quad a \circ b = b \circ a,$$

kaže se da je grupa komutativna ili ABELOVA.

Grupa $(G, \circ)$ je konačna ako je skup G konačan, inače je beskonačna.

Na osnovu stava 2 u 1.14.5 svi elementi jedne grupe regularni su za operaciju grupe.

PRIMER 1. Skup racionalnih brojeva, u odnosu na sabiranje, obrazuje beskonačnu ABELOVU grupu. Ovde je jedinični element 0, a inverzni element racionalnog broja r je $-r$.

PRIMER 2. Celi brojevi u odnosu na sabiranje obrazuju beskonačnu ABELOVU grupu.

PRIMER 3. Prirodni brojevi ne obrazuju grupu u odnosu na množenje, jer ne postoje simetrični elementi (osim za broj 1).

PRIMER 4. Funkcije f_1, f_2, f_3, f_4, date redom sa

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x},$$

čine grupu u odnosu na operaciju $\circ$ definisanu na sledeći način:

$$f_i(x) \circ f_j(x) = f_i(f_j(x)) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Svaka konačna grupa može se predstaviti CAYLEYevom tablicom, koja u ovom slučaju glasi

$\circ$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$f_2(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$
$f_3(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
$f_4(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$

PRIMER 5. Funkcije

$$t\mapsto t,\quad t\mapsto \frac{1}{t},\quad t\mapsto 1-t,\quad t\mapsto \frac{1}{1-t},\quad t\mapsto \frac{t-1}{t},\quad t\mapsto \frac{t}{t-1}$$

obrazuju grupu u onosu na operaciju proizvod funkcija (videti definiciju 6 u 1.10).

PRIMER 6. Skup $\{(x, y) \mid x, y\in \mathbf{R}\}$ obrazuje grupu u odnosu na operaciju $\bigcirc$ definisanu sa

$$(x_1, y_1)\bigcirc(x_2, y_2)=(x_1+x_2e^{-y_1},\ y_1+y_2),$$

gde su $x_1, x_2, y_1, y_2\in \mathbf{R}$.

PRIMER 7. Skup $\{1, \ldots, p-1\}$, gde je p prost broj, obrazuje ABELovu grupu u odnosu na operaciju množenje svođenjem na modul p.

1.17. PODGRUPE

Neka je data grupa $(G, \cdot)$. Neka je $H\subset G$, tako da važe implikacije:

(1) $x, y\in H \Rightarrow x\cdot y\in H,$

(2) $x\in H \Rightarrow x^{-1}\in H.$

U skupu H možemo definisati binarnu operaciju $\bigcirc$ pomoću

(3) $x\bigcirc y=x\cdot y \quad (x, y\in H)$

jer je, na osnovu (1), $x\cdot y\in H$. Dokazaćemo da pod uslovima (1) i (2) skup H ima strukturu grupe u odnosu na operaciju $\bigcirc$.

Asocijativnost: Za svako $x, y, z\in H$ je

$$x\bigcirc(y\bigcirc z)=x\bigcirc(y\cdot z)=x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=(x\cdot y)\bigcirc z=(x\bigcirc y)\bigcirc z.$$

Jedinični elementi: Neka je e jedinični element grupe G. Ako je $x\in H$, na osnovu (2) je i $x^{-1}\in H$. Na osnovu (1) odavde sleduje $e=x\cdot x^{-1}\in H$. Za proizvoljno $x\in H$ je

$$x\bigcirc e=x\cdot e=x,\qquad e\bigcirc x=e\cdot x=x,$$

tj. e je takođe jedinični element za operaciju $\bigcirc$.

Inverzni element: Na osnovu (2), za svako $x\in H$ je $x^{-1}\in H$, pa je

$$x\bigcirc x^{-1}=x\cdot x^{-1}=e,\qquad x^{-1}\bigcirc x=x^{-1}\cdot x=e,$$

tj. x^{-1} je takođe i inverzni element elementa x u odnosu na operaciju $\bigcirc$.

Definicija 1. *Ako je $(G, \cdot)$ grupa i $H\subset G$, pri čemu važi* (1), (2) *i* (3), *grupa $(H, \bigcirc)$ naziva se podgrupa date grupe G.*

Za operaciju $\bigcirc$ u podgrupi H kaže se da je dobijena restrikcijom operacije $\cdot$ iz G. Uobičajeno je da se ove dve operacije označavaju istim simbolom.

Svaka grupa G ima dve trivijalne podgrupe, a to su: sama grupa G i grupa $\{e\}$ čiji je jedini element jedinični element e grupe G.

Definicija 2. *Ako je $(G, \cdot)$ konačna grupa koja ima n elemenata, broj n naziva se red te grupe.*

Za podgrupe važi sledeći stav (LAGRANGEova teorema) koji navodimo bez dokaza.

Stav 1. *Ako je $(G, \cdot)$ grupa reda n i $(H, \cdot)$ njena podgrupa reda m, broj n deljiv je sa m.*

1.18. HOMOMORFIZAM I IZOMORFIZAM GRUPA

Definicija 1. *Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ dve grupe. Ako postoji preslikavanje f skupa G na skup H takvo da je*

$$(\forall x, y\in G)\quad f(x\cdot y)=f(x)\times f(y),$$

kaže se da je f homomorfizam grupe $(G, \cdot)$ na grupu $(H, \times)$. Grupa $(H, \times)$ naziva se homomorfnom slikom grupe $(G, \cdot)$.

PRIMER 1. Posmatrajmo grupu $(\mathbf{Z}, +)$, gde je $+$ obično sabiranje i grupu $(G, \cdot)$, pri čemu je $G=\{-1, 1\}$ i $\cdot$ obično množenje. Preslikavanje f definisano sa

$$f(2n)=1\quad (n\in \mathbf{Z}),\qquad f(2n+1)=-1\quad (n\in \mathbf{Z})$$

je homomorfizam grupe $(\mathbf{Z}, +)$ na grupu $(G, \cdot)$ ako je $f(x+y)=f(x)\,f(y)$. Da bismo proverili ovu relaciju moramo razlikovati tri slučaja:

1° x i y su parni brojevi. Tada je i $x+y$ paran broj, pa je $1=1\cdot 1$, što je tačno;

2° Ako su x i y neparni brojevi, tada je $x+y$ paran broj, pa je $1=(-1)\cdot(-1)$, što je takođe tačno;

3° Ako je jedan od brojeva x i y paran a drugi neparan, broj $x+y$ je neparan, pa je tada $-1=(-1)\cdot 1$, što je takođe tačno. Prema tome, f je homomorfizam grupe $(\mathbf{Z}, +)$ na grupu $(G, \cdot)$.

Stav 1. *Neka su date grupe $(M, \bigcirc_1)$, $(N, \bigcirc_2)$, $(P, \bigcirc_3)$. Neka je f homomorfizam grupe $(M, \bigcirc_1)$ na grupu $(N, \bigcirc_2)$ i g homomorfizam grupe $(N, \bigcirc_2)$ na grupu $(P, \bigcirc_3)$. Tada je proizvod preslikavanja f i g homomorfizam grupe $(M, \bigcirc_1)$ na grupu $(P, \bigcirc_3)$.*

Dokaz. S obzirom na uslove stava, važe jednakosti

$$(\forall x, y\in M)\quad f(x\bigcirc_1 y)=f(x)\bigcirc_2 f(y),$$

$$(\forall x, y\in N)\quad g(x\bigcirc_2 y)=g(x)\bigcirc_3 g(y).$$

Odavde nalazimo

$$g\big(f(x\bigcirc_1 y)\big)=g\big(f(x)\bigcirc_2 f(y)\big)=g\big(f(x)\big)\bigcirc_3 g\big(f(y)\big),$$

tj. za svako $x, y\in M$ važi jednakost

$$g\big(f(x\bigcirc_1 y)\big)=g\big(f(x)\big)\bigcirc_3 g\big(f(y)\big),$$

čime je stav dokazan.

Definicija 2. *Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ dve grupe. Ako postoji biunivoko preslikavanje skupa G na skup H, takvo da je*

$$(\forall x, y\in G)\quad f(x\cdot y)=f(x)\times f(y),$$

kaže se da je f izomorfizam grupe $(G, \cdot)$ *na grupu* $(H, \times)$ *i da su ove dve grupe izomorfne.*

Razlika između homomorfizma i izomorfizma je u tome, što se kod izomorfizma traži da je preslikavanje obostrano-jednoznačno (biunivoko) dok se kod homomorfizma taj uslov ne zahteva.

Primer 2. Homomorfizam iz primera 1 nije izomorfizam, jer preslikavanje f nije biunivoko.

Primer 3. Neka je R skup svih realnih brojeva, R^+ skup svih realnih pozitivnih brojeva, $+$ obično sabiranje i $\cdot$ obično množenje. Grupoidi $(R^+, \cdot)$ i $(R, +)$ imaju strukture grupa. Ove dve grupe su izomorfne. Jedan izomorfizam grupe $(R^+, \cdot)$ na grupu $(R, +)$ je preslikavanje $x \mapsto \log x$. Zaista, ovo preslikavanje je biunikovo i preslikava skup R^+ na R i važi jednakost

$$(\forall x, y) \quad xy \to \log(xy) = \log x + \log y.$$

Primetimo da ovo nije jedini izomorfizam ovih grupa.

Primer 4. Date su grupe $(G, \bigcirc)$ i $(H, \cdot)$, gde je

$$G = \{1, 4, 16, 13\}, \quad H = \{1, i, -1, -i\}$$

i gde je $\bigcirc$ operacija množenja modulo 17 i $\cdot$ operacija množenja kompleksnih brojeva. Primetimo da je $x \bigcirc y$ jednako ostatku deljenja proizvoda xy sa 17.

Ako između G i H uspostavimo biunivoku korespondenciju

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 4 \leftrightarrow i, \quad 16 \leftrightarrow -1, \quad 13 \leftrightarrow -i,$$

možemo konstatovati da je ta korespondencija izomorfizam grupe $(G, \bigcirc)$ na grupu $(H, \cdot)$. Ovo se najbolje vidi ako se ispitaju sve moguće vrednosti proizvoda xy i vrednosti odgovarajućih slika, koristeći se pri tome Cayleyevim tablicama:

$\bigcirc$	1	4	16	13
1	1	4	16	13
4	4	16	13	1
16	16	13	1	4
13	13	1	4	16

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Stav 2. *Ako je f izomorfizam grupe* $(G, \cdot)$ *na grupu* $(H, \times)$, *tada je inverzno preslikavanje* f^{-1} *izomorfizam grupe* $(H, \times)$ *na grupu* $(G, \cdot)$.

Dokaz. U stvari, treba da dokažemo da je

$$(\forall x, y \in H) \quad f^{-1}(x \times y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y).$$

Međutim, kako je f biunivoko preslikavanje, dovoljno je da dokažemo jednakost

$$(1) \qquad f(f^{-1}(x \times y)) = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)).$$

Pošto je f izomorfizam grupe $(G, \cdot)$ na grupu $(H, \times)$, desna strana u (1) postaje

$$f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) \times f(f^{-1}(y)) = x \times y,$$

a ovome je jednaka i leva strana u (1). Ovim je stav dokazan.

Primer 5. Uočimo grupe $(R^+, \cdot)$ i $(R, +)$ iz primera 3. Preslikavanje $x \mapsto a^x$ $(x \in R, a \neq 1)$ je izomorfizam grupe $(R, +)$ na grupu $(R^+, \cdot)$, što se bez teškoće proverava. Ovo preslikavanje je u stvari inverzno preslikavanje od onoga koje je posmatrano u primeru 3.

Definicija 3. *Homomorfizam grupe* $(G, \cdot)$ *na samu sebe naziva se endomorfizam.*

Definicija 4. *Izomorfizam grupe* $(G, \cdot)$ *na samu sebe naziva se automorfizam te grupe.*

Primer 6. Preslikavanje $x \mapsto ax$, gde je $a (\neq 0)$ realna konstanta, je automorfizam grupe $(R, +)$, jer funkcija $x \mapsto ax$ biunivoko preslikava R na R i važi

$$(\forall x, y \in R) \quad x + y \mapsto a(x + y) = ax + ay.$$

Analogno se definišu homomorfizam, endomorfizam, izomorfizam i automorfizam i za druge algebarske strukture (npr. za grupoide).

1.19. DVE BINARNE OPERACIJE NA JEDNOM SKUPU

Definicija 1. *Neka su na jednom skupu S definisane dve binarne operacije* $\bigcirc_1$ *i* $\bigcirc_2$. *Ako važi*

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a \bigcirc_2 (b \bigcirc_1 c) = (a \bigcirc_2 b) \bigcirc_1 (a \bigcirc_2 c),$$

kaže se da je operacija $\bigcirc_2$ *levo distributivna u odnosu na* $\bigcirc_1$.

Definicija 2. *Neka su na jednom skupu S definisane dve binarne operacije* $\bigcirc_1$ *i* $\bigcirc_2$. *Ako važi*

$$(\forall a, b, c \in S) \quad (a \bigcirc_1 b) \bigcirc_2 c = (a \bigcirc_2 c) \bigcirc_1 (b \bigcirc_2 c),$$

kaže se da je operacija $\bigcirc_2$ *desno distributivna u odnosu na* $\bigcirc_1$.

Definicija 3. *Operacija* $\bigcirc_2$ *je distributivna u odnosu na* $\bigcirc_1$ *ako je levo i desno distributivna u odnosu na* $\bigcirc_1$.

Primer 1. Množenje kompleksnih brojeva distributivno je u odnosu na sabiranje kompleksnih brojeva. Međutim, sabiranje nije distributivno u odnosu na množenje jer ne važi jednakost

$$(\forall a, b, c \in C) \quad bc + a = (b + a)(c + a).$$

Primer 2. Operacije $\cup$ i $\cap$ imaju, kao što smo videli u 1.4.3, dualni karakter: unija je distributivna u odnosu na presek i presek je distributivan u odnosu na uniju.

1.20. OPERACIJE MAX I MIN[1]

Neka je $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konačan skup proizvoljnih realnih brojeva. U skupu E definisaćemo operacije max i min na sledeći način:

1° $\max(a_i, a_j)$ *označava onaj od brojeva* a_i, a_j *koji nije manji od drugog;*

2° $\min(a_i, a_j)$ *označava onaj od brojeva* a_i, a_j *koji nije veći od drugog.*

Za ovako definisane binarne operacije važe sledeći zakoni, koji se bez teškoće, na osnovu definicija, proveravaju:

1. Asocijativni zakon:

$$\max(\max(a, b), c) = \max(a, \max(b, c)),$$

$$\min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c));$$

2. Komutativni zakon:

$$\max(a, b) = \max(b, a), \qquad \min(a, b) = \min(b, a);$$

[1] Redigovano prema članku: D. S. Mitrinović: *O operacijama max i min.* Annuaire de la Faculté de Philosophie de l'Université de Skopje, Section des sciences naturelles 3, No. 4 (1950), 1—10.

3. Idempotentni zakon:

$$\max(a, a)=a, \qquad \min(a, a)=a;$$

4. Apsorptivni zakon:

$$\max(a, \min(a, b))=a, \qquad \min(a, \max(a, b))=a;$$

5. Distributivni zakon:

$$\max(a, \min(b, c))=\min(\max(a, b), \max(a, c)),$$

$$\min(a, \max(b, c))=\max(\min(a, b), \min(a, c)),$$

gde su a, b, c tri ma koja elementa skupa E.

Prenumerisavanjem uvek se može podesiti da su elementi $a_1, \ldots, a_n$ takvi da je $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$. Tada je za operaciju max neutralni element a_1, jer je, za svako $k\,(1 \leqq k \leqq n)$,

$$\max(a_1, a_k)=a_k.$$

Pod istim pretpostavkama o uređenju elemenata $a_1, \ldots, a_n$, za operaciju min u skupu E neutralni element je a_n, jer je za svako $k\,(1 \leqq k \leqq n)$,

$$\min(a_k, a_n)=a_k.$$

Na sličan način mogu se definisati k-arne operacije max i min na skupu realnih brojeva $E=\{a_1, \ldots, a_n\}$. Induktivna definicija ovih operacija je

$$\max(a_1, \ldots, a_k)=\max(\max(a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k),$$

$$\min(a_1, \ldots, a_k)=\min(\min(a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k).$$

Dokazaćemo sledeći stav:

Stav 1. *Za proizvoljne realne brojeve $x_1, \ldots, x_p$ (p neparan broj) važi jednakost*

$$\min(\max(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \max(x_{p-k+1}, \ldots, x_p))$$
$$=\max(\min(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \min(x_{p-k+1}, \ldots, x_p)),$$

gde se k-narne operacije min *i* max *primenjuju na sve kombinacije klase $k\left(k=\dfrac{p+1}{2}\right)$ od p elemenata $x_1, \ldots, x_p$.*

Dokaz. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je

(1) $\quad x_1<\cdots<x_p.$

Primenom operacija max i min na sve kombinacije k-te klase od p elemenata $x_1, \ldots, x_p$ mogu se obrazovati sledeća dva izraza

$$M=\max(\min(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \min(x_{p-k+1}, \ldots, x_p)),$$

$$N=\min(\max(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \max(x_{p-k+1}, \ldots, x_p)).$$

Vodeći računa o (1), imamo

$$M=\max(x_1, \ldots, x_{p-k+1})=x_{p-k+1}, \qquad N=\min(x_k, \ldots, x_p)=x_k.$$

Izrazi M i N su jednaki ako je $k=p-k+1$, tj. ako je $p=2k-1$, što znači da je p neparan broj.

Ovim je stav dokazan.

1.21. PRSTEN. TELO. POLJE

Definicija 1. *Neka su na skupu S definisane dve binarne operacije redom označene sa $+$ i $\cdot$. Kažemo da S čini prsten u odnosu na te dve operacije ako su ispunjeni uslovi:*

1° *Skup S čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $+$;*

2° *Operacija $\cdot$ je asocijativna, tj. važi*

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c;$$

3° *Operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$, tj.*

$$(\forall a, b, c \in S) \quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c, \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Operacija $+$ obično se zove sabiranje, a operacija $\cdot$ množenje. Neutralni element operacije $+$ označava se sa 0. *Prsten koji čine skup S i njegove operacije $+$ i $\cdot$ označava se $(S, +, \cdot)$.*

Definicija 2. *Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se telo, ako skup $S \setminus \{0\}$ čini grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.*

Definicija 3. *Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se polje, ako skup $S \setminus \{0\}$ čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.*

PRIMER 1. U odnosu na sabiranje i množenje brojeva, sledeći skupovi čine polje:

- Skup **Q**;
- Skup **R**;
- Skup **C**;
- Skup svih brojeva oblika $a+ib$, gde su a i $b \in \mathbf{Q}$;
- Skup svih brojeva oblika $a+\sqrt{2}\,b$, gde su a i $b \in \mathbf{Q}$.

PRIMER 2. U odnosu na sabiranje i množenje brojeva, skup **Z** je prsten ali ne i polje.

1.22. LINEARNI (VEKTORSKI) PROSTOR

Definicija 1. *Skup L naziva se linearni (vektorski) prostor nad poljem F ako je u skupu L definisana jedna binarna operacija $+$ u odnosu na koju skup L čini komutativnu grupu i ako je svakom paru (a, α) $(a \in L, \alpha \in F)$ dodeljen po jedan element αa skupa L tako da su ispunjeni uslovi:*

$$(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a),$$

$$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a,$$

$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b,$$

$$1a=a$$

za sve elemente $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in L$. Sa 1 je označen jedinični element polja F. Elementi skupa L zovu se vektori, elementi polja F skalari, operacija + skupa L vektorsko sabiranje, operacija $(a, \alpha) \to \alpha a$ množenje vektora skalarom.

PRIMER 1. Nad poljem **R** realnih brojeva sledeći skupovi čine linearni prostor u odnosu na navedene operacije:

Skup svih vektora (o vektorima videti poglavlje Analitička geometrija) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ u odnosu na običan vektorski zbir i množenje vektora skalarom;

Skup svih polinoma (o polinomima videti poglavlje Polinomi) u odnosu na operacije sabiranje polinoma i množenje polinoma konstantom;

PRIMER 2. Skup svih polinoma čiji je stepen fiksiran broj n nije linearni prostor u odnosu na operacije sabiranja polinoma i množenje polinoma konstantom.

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8, 1.1.9, 1.1.10, 1.1.11, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7, 1.2.8, 1.2.9, 1.2.10, 1.2.11, 1.2.12, 1.2.13, 1.2.14, 1.2.15, 1.2.16, 1.2.17, 1.2.18, 1.2.19, 1.2.20, 1.2.21, 1.2.22, 1.2.23, 1.2.24, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7, 1.3.8, 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11, 1.3.12, 1.3.13, 1.3.14, 1.3.15, 1.3.16, 1.3.17, 1.3.18, 1.3.19, 1.3.20, 1.3.21, 1.3.22, 1.3.23, 1.3.24, 1.3.25, 1.3.26, 1.3.27, 1.3.28, 1.3.29, 1.3.30, 1.3.31, 1.3.32, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8, 1.4.9, 1.4.10, 1.4.11, 1.4.12, 1.4.13, 1.4.14.

2. METOD INDUKCIJE*

2.1. EMPIRIJSKA INDUKCIJA

Posmatranjem ili eksperimentisanjem u prirodnim naukama dobijaju se podaci koji se odnose na jednu pojavu. Iz ovih posebnih slučajeva, u obliku radne hipoteze ili zakona, izvodi se stav koji dovoljno tačno opisuje ovu pojavu u svim slučajevima. Ovako zaključivanje zove se *indukcija.*

Drugim rečima, *indukcija je zaključivanje kojim se iz stavova što se odnose na ograničen broj pojedinih slučajeva iste vrste izvodi jedan opšti stav, tj. stav koji se odnosi na sve slučajeve te vrste.*

Takav metod zaključivanja takođe se naziva *empirijska indukcija, fizička indukcija ili nepotpuna indukcija.*

Zakon dobijen na osnovu empirijske indukcije je manje ili više razumna hipoteza podložna promenama na osnovu iskustva koje će se steći u budućnosti.

Izvesnost zakona, utvrđenog navedenim putem, zavisi od broja posebnih eksperimenata (ogleda, opita, zapažanja), kao i od broja potvrda zakona o kome je reč.

Indukcijom se može doći kako do istinitih stavova, tako i do neistinitih zaključaka. Istorija prirodnih nauka zabeležila je mnogobrojne primere neistinitih zaključaka izvedenih indukcijom.

I u matematici je formulisano više neistinitih stavova koji su dobijeni nepotpunom indukcijom. Navešćemo tri primera.

1° G. LEIBNIZ je dokazao relacije

$$3\,|\,(n^3-n), \quad 5\,|\,(n^5-n), \quad 7\,|\,(n^7-n) \quad (n=0, 1, \ldots)$$

i na osnovu njih pretpostavio da uopšte važi

$$k\,|\,(n^k-n) \quad (k \text{ neparno}; \ n=0, 1, \ldots).$$

Međutim, on sâm uskoro je primetio da broj $2^9-2\,(=510)$ nije deljiv sa 9.

G. LEIBNIZ je, dakle, na osnovu nepotpune indukcije iskazao stav koji je on sâm opovrgao navedenim kontra-primerom.

2° Posmatrajmo brojeve:

(1) $$f(n)=2^{2^n}+1 \quad (n=0, 1, \ldots).$$

* Detaljnije o indukciji videti, na primer, u knjizi:

D. S. MITRINOVIĆ: *Matematička indukcija. Binomna formula. Kombinatorika,* drugo izdanje. Beograd 1970.

Iz pretpostavke (2) sleduje

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3},$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

Dobijena jednakost je identična sa (1) u slučaju kada je $n=k+1$.

Na osnovu stava o matematičkoj indukciji, ovim je dokazan identitet (1). Zaista, uzmimo da je $k=1$. Prema dokazanom ako je (1) tačno za $n=1$, biće tačno i za $n=2$.

Uzmimo da je $k=2$. Prema dokazanom ako je (1) tačno za $n=2$, tačno je i za $n=3$. Kako smo već zaključili da je (1) tačno za $n=2$, sada zaključujemo da je tačno i za $n=3$.

Ponavljajući ovaj postupak potreban konačan broj puta, zaključujemo da je identitet (1) tačan za svaki unapred dati prirodni broj n.

Primer 4. Neka niz brojeva (a_n) zadovoljava rekurentnu relaciju

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ (n prirodan broj ili nula)

i neka je $a_0=0$ i $a_1=1$. Metodom matematičke indukcije dokazaćemo da je

(2) $$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Jednakost (2) je tačna za $n=0$ i $n=1$. Pretpostavimo da je tačna za n i $n+1$ ($n\in N$). Tada je na osnovu rekurentne relacije (1)

(3) $$a_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right)\right].$$

Kako je

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}=1,$$

iz (3) dobijamo

$$a_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right),$$

te (2) važi i za $n+2$ ako važi za n i za $n+1$. Ovim je matematičkom indukcijom dokazana jednakost (2).

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12; I. B. K: 1.7.2, 1.7.3, 1.7.4, 1.7.7, 1.7.8, 1.7.9, 1.7.10, 1.7.11, 1.7.12, 1.7.13, 1.7.14, 1.7.16, 1.7.17, 1.7.18, 1.7.19, 1.7.20, 1.7.22, 1.7.23. 1.7.26, 4.4, 4.5, 4.8, 4.14.

3. KOMPLEKSNI BROJEVI

3.1. DEFINICIJA KOMPLEKSNIH BROJEVA

Definicija 1. *Skup svih kompleksnih brojeva, u oznaci* **C**, *je skup svih uređenih parova* $z=(x, y)$ *realnih brojeva za koje važe sledeće aksiome:*

1° *Aksioma sabiranja:* $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$,

2° *Aksioma množenja:* $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$.

Stav 1. *Za kompleksne brojeve* z_1, z_2, z_3 *važe jednakosti*

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),\quad (z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

Drugačije se kaže da su sabiranje i množenje kompleksnih brojeva komutativne i asocijativne operacije i da je množenje distributivno prema sabiranju.

Navedene jednakosti dokazuju se bez teškoća. U dokazu se koristi da sabiranje i množenje realnih brojeva takođe imaju navedene osobine.

3.2. NEUTRALNI ELEMENTI

Definicija 1. *Kompleksni broj* (0, 0) *zovemo kompleksna nula, a broj* (1, 0) *kompleksna jedinica.*

Opravdanje za takve nazive daje sledeći stav:

Stav 1. *Za svaki kompleksan broj z važe jednakosti*

$$z+(0, 0)=z,\qquad z\cdot(1, 0)=z.$$

Ove se jednakosti neposredno dokazuju korišćenjem definicija sabiranja i množenja kompleksnih brojeva. Na primer, neka je $z=(x, y)$ bilo koji kompleksni broj; tada je

$$z\cdot(1, 0)=(x, y)\cdot(1, 0)=(x\cdot 1-y\cdot 0,\ x\cdot 0+y\cdot 1)=(x, y)=z,$$

čime je dokazana jednakost $z\cdot(1, 0)=z$.

Ovim stavom iskazana su *karakteristična* svojstva brojeva (0, 0) i (1, 0). Sledeći stav govori o tome da su to jedini brojevi koji imaju navedena svojstva.

Stav 2. *Neka su a i b dva kompleksna broja takva da za svaki kompleksan broj z važe jednakosti*

$$z+a=z,\quad z\cdot b=z.$$

Tada je $a=(0, 0)$ *i* $b=(1, 0)$.

Dokaz. Neka je $z+a=z$ za svaki kompleksan broj z. Stavljajući $(0, 0)$ umesto z, dobijamo $(0, 0)+a=(0, 0)$. Na osnovu stava 1 je $(0, 0)+a=a$, pa je, prema tome, $a=(0, 0)$. Slično, ako se u jednakosti $z\cdot b=z$ zameni z sa $(1, 0)$, na osnovu stava 1 dobija se $b=(1, 0)$.

Ovim je dokaz završen.

Definicija 2. *Broj* $(0, 0)$ *zove se neutralni element za sabiranje kompleksnih brojeva. Broj* $(1, 0)$ *zove se neutralni element za množenje kompleksnih brojeva.*

3.3. SUPROTAN BROJ KOMPLEKSNOG BROJA. ODUZIMANJE

Definicija 1. *Suprotan broj kompleksnog broja* z, *u oznaci* $-z$, *je takav kompleksan broj da je*

$$z+(-z)=(0, 0).$$

PRIMER 1. Suprotan broj za broj $(3, 4)$ je $(-3, -4)$ jer je

$$(3, 4)+(-3, -4)=(3+(-3), 4+(-4))=(0, 0).$$

Uopšte, za kompleksan broj (x, y) suprotan broj je $(-x, -y)$, što se proverava bez teškoće.

Stav 1. *Svaki kompleksan broj* (x, y) *ima tačno jedan suprotan broj i to je* $(-x, -y)$.

Dokaz. Neka je (x_1, y_1) suprotan broj broja (x, y). Prema definiciji 1 je

$$(x, y)+(x_1, y_1)=(0, 0).$$

Dodavanjem $(-x, -y)$ na obe strane dobijamo

$$(-x, -y)+(x, y)+(x_1, y_1)=(-x, -y)+(0, 0),$$

na osnovu čega zaključujemo da je $(x_1, y_1)=(-x, -y)$.

Ovim je dokaz završen.

Stav 2. *Ako su* $z_1=(x_1, y_1)$ *i* $z_2=(x_2, y_2)$ *dva proizvoljna kompleksna broja, postoji tačno jedan kompleksan broj* z *takav da je* $z_1+z=z_2$. *Taj broj je jednak* $z_2+(-z_1)$, *zove se razlika redom brojeva* z_2 *i* z_1, *i označava sa* z_2-z_1.

Dokaz. Koristeći se stavom 1, kao i osobinama sabiranja datim u 3.1, neposredno imamo

$$\begin{aligned} z_1+z=z_2 &\Leftrightarrow (-z_1)+z_1+z=(-z_1)+z_2 \\ &\Leftrightarrow (0, 0)+z=z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow z=z_2+(-z_1). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen.

3.4. RECIPROČAN BROJ KOMPLEKSNOG BROJA. DELJENJE

Definicija 1. *Recipročan broj kompleksnog broja* z (*različitog od* $(0, 0)$), *u oznaci* $\frac{1}{z}$, *je kompleksan broj takav da je*

$$z\cdot\frac{1}{z}=(1, 0).$$

PRIMER 1. Recipročan broj broja $(3, 4)$ je $\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$ jer je

$$(3, 4)\cdot\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)=\left(3\cdot\frac{3}{25}+4\cdot\frac{4}{25}, -3\frac{4}{25}+4\cdot\frac{3}{25}\right)=(1, 0).$$

Za broj $(0, 0)$ ne postoji recipročan broj, jer ako pretpostavimo da je to (x, y), onda jednakost $(0, 0)\cdot(x, y)=(1, 0)$ dovodi do $(0, 0)=(1, 0)$, odakle je $0=1$, što je nemogućno. Zato smo u prethodnoj definiciji pretpostavili da je $z\neq(0, 0)$.

Stav 1. *Svaki kompleksan broj* $(x, y)\neq(0, 0)$ *ima tačno jedan recipročan broj i to je* $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Dokaz. Uočimo jednačinu po (x_1, y_1)

(1) $\quad (x, y)\cdot(x_1, y_1)=(1, 0) \quad ((x, y)\neq(0, 0))$

i dokažimo da ima jedinstveno rešenje. Ta jednačina je na osnovu definicije množenja kompleksnih brojeva ekvivalentna sa

(2) $\quad (xx_1-yy_1, xy_1+yx_1)=(1, 0).$

Ova jednačina je ekvivalentna sa sistemom jednačina

(3) $\quad xx_1-yy_1=1 \wedge xy_1+yx_1=0,$

jer su kompleksni brojevi uređeni parovi.

Pošto je $(x, y)\neq(0, 0)$, tj. $x^2+y^2\neq0$, sistem jednačina (3) je ekvivalentan sa

(4) $\quad x_1=\frac{x}{x^2+y^2} \wedge y_1=-\frac{y}{x^2+y^2},$

odakle je

$$(x_1, y_1)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ovim je dokaz završen, jer je jednačina (1) ekvivalentna sa (4).

Stav 2. *Ako su* $z_1=(x_1, y_1)$ *i* $z_2=(x_2, y_2)$ *dva ma koja kompleksna broja i* $(x_1, y_1)\neq(0, 0)$, *postoji tačno jedan kompleksan broj* $z=(x, y)$ *takav da je* $z_1\cdot z=z_2$. *Taj broj je jednak sa* $z_2\cdot\frac{1}{z_1}$, *zove se količnik redom brojeva* z_2 *i* z_1, *i označava* $\frac{z_2}{z_1}$ (*ili* $z_2:z_1$).

Dokaz. U dokazu, između ostalog, primenjujemo stav 1:

$$z_1\cdot z=z_2 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1}\cdot z_1\cdot z=\frac{1}{z_1}\cdot z_2$$

$$\Leftrightarrow (1,\ 0)\cdot z=z_2\cdot\frac{1}{z_1}$$

$$\Leftrightarrow z=z_2\cdot\frac{1}{z_1}.$$

Ovim je dokaz završen, jer je dokazano da je jednačina $z_1\cdot z=z_2$ ekvivalentna sa $z=z_2\cdot\frac{1}{z_1}$.

3.5. POLJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Na osnovu 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4 zaključujemo da za kompleksne brojeve važi rezultat:

Stav 1. *Za proizvoljne kompleksne brojeve* $z_1,\ z_2,\ z_3$ *je*

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),\quad (z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1+(0,\ 0)=z_1,\quad z_1\cdot(1,\ 0)=z_1,$$

$$z_1+(-z_1)=(0,\ 0),\quad z_1\cdot\frac{1}{z_1}=(1,\ 0)\quad (z_1\neq(0,\ 0)),$$

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

Drugim rečima, skup svih kompleksnih brojeva čini polje u odnosu na sabiranje i množenje. Slični uslovi važe i za skup realnih brojeva (u tom slučaju treba (0, 0) i (1, 0) po redu zameniti sa 0 i 1; $z_1,\ z_2,\ z_3$ su realni brojevi, dok su $+$ i $\cdot$ oznake za sabiranje i množenje realnih brojeva). Stoga kažemo da i skup svih realnih brojeva čini polje u odnosu na sabiranje i množenje.

Uočimo sada kompleksne brojeve $(x,\ 0)$, čija je druga komponenta nula.

Za takve brojeve važe jednakosti

$$(x_1,\ 0)+(x_2,\ 0)=(x_1+x_2,\ 0),$$

$$(x_1,\ 0)\cdot(x_2,\ 0)=(x_1 x_2,\ 0),$$

$$-(x_1,\ 0)=(-x_1,\ 0),$$

$$\frac{1}{(x_1,\ 0)}=\left(\frac{1}{x_1},\ 0\right)\quad (x_1\neq 0).$$

Drugim rečima, kompleksni brojevi oblika $(x,\ 0)$ imaju iste algebarske osobine kao i realni brojevi.

Biunivoka korespondencija

$$(x,\ 0)\leftrightarrow x\quad (x \text{ realan broj})$$

je izomorfizam jer su formule

$$(x_1,\ 0)+(x_2,\ 0)\leftrightarrow x_1+x_2,\quad (x_1,\ 0)\cdot(x_2,\ 0)\leftrightarrow x_1\cdot x_2$$

tačne za sve realne brojeve x_1 i x_2.

Dakle, polje realnih brojeva izomorfno je sa poljem kompleksnih brojeva oblika $(x,\ 0)$.

Zbog izomorfizma kompleksan broj $(x,\ 0)$ može se identifikovati sa realnim brojem x. Ubuduće između brojeva $(x,\ 0)$ i x nećemo praviti nikakve razlike. Specijalno, broj $(0,\ 0)$ identifikovaćemo sa 0 i broj $(1,\ 0)$ sa 1.

Definicija 1. *Kompleksan broj* $(0,\ 1)$ *zovemo imaginarna jedinica i označavamo sa* i.

Stav 2. *Svaki kompleksan broj* $(x,\ y)$ *može se predstaviti na jedinstven način u obliku* $x+iy$, *koji se zove algebarski oblik kompleksnog broja* $(x,\ y)$.

Dokaz. Koristeći se sa $(x,\ 0)=x$ i $(y,\ 0)=y$, imamo

$$(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ 1)(y,\ 0)=x+iy,$$

jer je $(0,\ 1)\cdot(y,\ 0)=(0\cdot y-1\cdot 0,\ 0\cdot 0+1\cdot y)=(0,\ y)$.

Ovim je stav 2 dokazan.

Na osnovu definicije 1 u 3.1 imamo

$$i^2=(0,\ 1)(0,\ 1)=-1.$$

Ako kompleksan broj predstavimo u algebarskom obliku, navedene definicije za sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje kompleksnih brojeva svode se na jednakosti:

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$$

$$z_1 z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1);$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{x_2+iy_2}{x_1+iy_1}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+i\,\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\qquad (z_1\neq 0).$$

Drugim rečima, racionalne operacije sa kompleksnim brojevima vrše se po pravilima algebre realnih brojeva, tj. kompleksan broj smatra se kao binom po i i umesto i^2 stavlja se -1.

3.6. REALNI I IMAGINARNI DEO KOMPLEKSNOG BROJA

Posmatrajmo kompleksan broj u algebarskom obliku $z=x+iy$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$.

Realni broj x naziva se realni deo kompleksnog broja z i označava $\operatorname{Re} z$.

Realni broj y naziva se imaginarni deo kompleksnog broja z i označava $\operatorname{Im} z$.

Prema konvenciji (videti 3.5) je $(x,\ 0)=x$. Odavde sleduje da je z realno ako i samo ako je $\operatorname{Im} z=0$.

Ako je $\operatorname{Re} z=0$, kaže se da je broj z čisto imaginaran.

Bez teškoće dokazuju se jednakosti:

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} z_k=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z_k,\qquad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} z_k=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im} z_k.$$

3.7. KONJUGOVANO-KOMPLEKSNI BROJEVI

Definicija 1. *Neka je dat broj* $z=x+iy$ $(x, y\in\mathbf{R})$. *Broj* $\bar{z}=x-iy$ *je konjugovan broju* z.

Primetimo da iz ove definicije sleduje da je i broj z konjugovan broju $\bar{z}$. Prema tome, važi $\bar{\bar{z}}=z$, tj. operacija konjugovanja je involutivna.

Ako se umesto x i y stave $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$, tada $z=x+iy$ i $\bar{z}=x-iy$ postaju

$$\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z=z, \qquad \operatorname{Re} z-i\operatorname{Im} z=\bar{z}.$$

Odavde sleduje

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

Stav 1. *Važe jednakosti:*

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \qquad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2, \qquad \overline{\bar{z}_1 z_2}=z_1\,\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}=\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k, \qquad \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)}=\prod_{k=1}^{n}\bar{z}_k,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad (z_2\neq 0).$$

Dokaz. Primera radi, dokazaćemo poslednju jednakost:

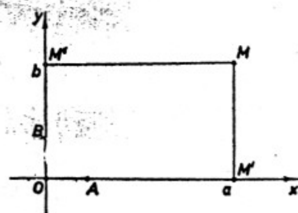
$$z_1=\frac{z_1}{z_2}z_2 \Rightarrow \bar{z}_1=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\bar{z}_2 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad (z_2\neq 0).$$

3.8. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA KOMPLEKSNOG BROJA

U jednoj ravni P fiksirajmo orijentisanu pravu i izaberimo na njoj tačku O (početak) i jedinicu dužine ($\overline{OA}=1$). Ovu pravu zvaćemo: osa realnih brojeva ili kratko x-osa (slika 3.8.1).

Između skupa realnih brojeva (aritmetički kontinuum) i tačaka na osi realnih brojeva (geometrijski kontinuum), prema CANTOROVOJ aksiomi, postoji biunivoka korespondencija. Drugim rečima, svakom realnom broju odgovara tačno jedna tačka na osi realnih brojeva i obrnuto, svakoj tački na ovoj osi odgovara tačno jedan realan broj.

Uočimo u ravni P još jednu orijentisanu osu (neka je to y-osa) koja je normalna na x-osi i orijentisana kako je na sl. 3.8.1 naznačeno. Neka se početak y-ose poklapa sa početkom x-ose i neka je jedinica dužine $\overline{OB}$ na y-osi jednaka jedinici dužine $\overline{OA}$ na x-osi.



Sl. 3.8.1.

Ravan P, tj. xy-ravan, zove se GAUSSOVA ravan ili kompleksna ravan ili z-ravan. Tada se x-osa zove realna osa, a y-osa imaginarna osa.

Realna osa deli kompleksnu ravan na dve poluravni, koje ćemo zvati gornja i donja poluravan. One su redom određene nejednakostima

(1) $\operatorname{Im} z\geqq 0$ i $\operatorname{Im} z\leqq 0$.

Imaginarna osa deli kompleksnu ravan na dve poluravni koje ćemo zvati: desna i leva poluravan. One su redom određene nejednakostima

(2) $\operatorname{Re} z\geqq 0$ i $\operatorname{Re} z\leqq 0$.

Stroge nejednakosti u (1) i (2) određuju poluravni iz kojih su isključene sve tačke realne odnosno imaginarne ose[1].

Brojevima a i b, prema CANTOROVOJ aksiomi, jednoznačno su određene na x-osi, odnosno y-osi, dve tačke M' i M''.

Tačka M, čija je apscisa a i ordinata b, je geometrijski predstavnik kompleksnog broja (a, b). Tačka M zove se slika kompleksnog broja (a, b), dok se kompleksan broj (a, b) zove afiks tačke M.

Na navedeni način uspostavljena je biunivoka korespondencija između skupa kompleksnih brojeva i skupa tačaka kompleksne ravni.

Neka je $z=x+iy$ proizvoljan kompleksan broj. Slobodan vektor čije su komponente x i y, zvaćemo vektor pridružen kompleksnom broju z. Ako je M slika kompleksnog broja z, tada je $|z|=OM$.

Obrnuto, svakom slobodnom vektoru $\vec{z}$ (čije zu komponente x i y) u kompleksnoj ravni odgovara (po gornjoj konvenciji) jedan i samo jedan kompleksan broj $x+iy$; njegov realni deo x jednak je ortogonalnoj projekciji vektora $\vec{z}$ na x-osi, a njegov imaginarni deo y ortogonalnoj projekciji vektora $\vec{z}$ na y-osi.

Upoređujući pravila za sabiranje i oduzimanje vektora i množenje vektora skalarom (realnim brojem) sa odgovarajućim pravilima za kompleksne brojeve, zaključujemo da je uvedena korespondencija izomorfizam.

To znači da se sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva kao i množenje kompleksnog broja realnim mogu vršiti po pravilima koja važe za vektore, pod uslovom da se vodi računa o uvedenoj korespondenciji.

3.9. MODUL I ARGUMENT KOMPLEKSNOG BROJA

Definicija 1. *Modul ili norma kompleksnog broja* $z=x+iy$ *je realan nenegativan broj* $\sqrt{x^2+y^2}$ *i označava se sa* $|z|$.

PRIMEDBA 1. Često se $|z|$ označava sa r ili ρ.

Svaki kompleksan broj $z=x+iy$, različit od nule, može se predstaviti u obliku

$$z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right).$$

[1] U jednom delu literature samo stroge nejednakosti u (1) i (2) definišu poluravni.

Kako su $\frac{x}{|z|}$ i $\frac{y}{|z|}$ realni brojevi takvi da je

$$\left|\frac{x}{|z|}\right| \leqq 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{y}{|z|}\right| \leqq 1,$$

i kako je

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1,$$

mogućno je odrediti realan broj θ takav da je

$$(1) \qquad \frac{x}{|z|} = \cos\theta \quad \text{i} \quad \frac{y}{|z|} = \sin\theta.$$

Dakle, imamo

$$z = |z| \,(\cos\theta + i\sin\theta).$$

To je trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Definicija 2. *Svaki broj θ koji zadovoljava jednakosti* (1) *zove se argument (arkus, amplituda) broja z i obeležava se* Arg z. *Broj θ koji ispunjava uslov $-\pi < \theta \leqq \pi$ zove se glavni argument ili glavna vrednost argumenta broja z i obeležava* arg z.

Argument broja 0 *ne definiše se.*

PRIMEDBA 2. Za glavni argument θ ponekad se uzima $0 \leqq \theta < 2\pi$.

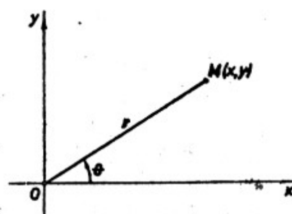
Ako je θ_0 jedna vrednost određena pomoću (1), tada su zbog periodičnosti funkcija $\theta \mapsto \sin\theta$ i $\theta \mapsto \cos\theta$ sva ostala rešenja po θ sistema jednačina (1) data su sa $\theta_0 + 2k\pi \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Prema tome, između Arg z i arg z postoji veza

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Geometrijska interpretacija. Kao što smo videli, kompleksan broj u GAUSSovoj ravni prikazuje se tačkom i svakom kompleksnom broju z može se pridružiti jedan i samo jedan vektor čiji je početak u koordinatnom početku O, a kraj u tački $M(x, y)$, gde je $z = x + iy$.

Intenzitet vektora $\overrightarrow{OM}$ je, u stvari, modul kompleksnog broja. Ugao za koji pozitivni deo x-ose treba da rotira oko tačke O, da bi se poklopio sa $\overrightarrow{OM}$ je argument kompleksnog broja $z\,(\neq 0)$, što sleduje iz (1) i geometrijske definicije sinusa i kosinusa (videti sl. 3.9.1).



Sl. 3.9.1.

Izraz $\cos\theta + i\sin\theta$ obeležava se cis θ.

Napomenimo da $\arg(x+iy)$ i $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\left(\text{gde je } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ glavna vrednost}\right)$ nemaju uvek iste vrednosti. U stvari, postoje sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \arg z &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} && (x>0), \\ &= \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} && (x<0 \wedge y>0), \\ &= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} && (x<0 \wedge y<0), \\ &= \frac{\pi}{2} && (x=0 \wedge y>0), \\ &= -\frac{\pi}{2} && (x=0 \wedge y<0), \\ &= \pi && (x<0 \wedge y=0). \end{aligned}$$

Dokazaćemo sada rezultat:

Stav 1. *Dva kompleksna broja z_1 i z_2, različita od nule, jednaka su ako i samo ako važe uslovi:*

$$(2) \qquad |z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Dokaz. Uslovi (2) su dovoljni. Zaista, ako su oni ispunjeni, kompleksni brojevi

$$z_\nu = r_\nu(\cos\theta_\nu + i\sin\theta_\nu) \quad (|z_\nu| = r_\nu;\ \operatorname{Arg} z_\nu = \theta_\nu) \qquad (\nu = 1, 2)$$

su jednaki, jer je, prema (2),

$$r_1 = r_2, \quad \cos\theta_1 = \cos\theta_2, \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

Dokazaćemo da su uslovi (2) takođe potrebni. Polazeći od jednakosti $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ $(z_\nu = x_\nu + iy_\nu)$, dobijamo

$$(3) \qquad r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2, \quad r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2,$$

$$(r_1^2\cos^2\theta_1 = r_2^2\cos^2\theta_2) \wedge (r_1^2\sin^2\theta_1 = r_2^2\sin^2\theta_2) \Rightarrow r_1 = r_2.$$

Jednakosti (3) sada postaju

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2,$$

i odatle je

$$\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ovim je dokazan stav 1.

3.10. JEDNAKOSTI SA MODULIMA

Stav 1. *Za proizvoljne kompleksne brojeve z_1 i z_2 važe jednakosti*

$$(1) \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$

$$(2) \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0).$$

Dokaz. Primenom jednakosti $|z|^2 = z\bar{z}$ dobija se

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

odakle sleduje (1).

Polazeći od identiteta

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 \qquad (z_2 \neq 0),$$

i primenjujući jednakost (1) dobija se

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = |z_1| \qquad (z_2 \neq 0),$$

odakle sleduje (2).

PRIMEDBA 1. Metodom matematičke indukcije dokazuje se da važi jednakost

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|,$$

koja je opštija od (1).

3.11. MOIVREOVA FORMULA

Proizvod dva kompleksna broja $z_1=r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ i $z_2=r_2 \operatorname{cis}\theta_2$ je

(1) $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 \\ &= r_1 r_2 \big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)\big) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2). \end{aligned}$$

Na osnovu ovog naslućujemo da je proizvod n kompleksnih brojeva

$$z_k = r_k \operatorname{cis}\theta_k \qquad (k=1, \dots, n)$$

dat sa

(2) $$\prod_{k=1}^{n} z_k = \Big(\prod_{k=1}^{r} r_k\Big) \operatorname{cis} \sum_{k=1}^{n} \theta_k.$$

Pretpostavimo li da je ova formula tačna za n, tada za kompleksne brojeve $z_k=r_k \operatorname{cis}\theta_k$ $(k=1, \dots, n+1)$ imamo

$$z_{n+1} \prod_{k=1}^{n} z_k = r_{n+1} \operatorname{cis}\theta_{n+1} \Big(\prod_{k=1}^{n} r_k\Big) \operatorname{cis} \sum_{k=1}^{n} \theta_k,$$

tj.

$$\prod_{k=1}^{n+1} z_k = \Big(\prod_{k=1}^{n+1} r_k\Big) \operatorname{cis} \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k.$$

Ovim smo dokazali formulu (2) za $n=1, 2, \dots$

Ako je $r_k=1$ i $\theta_k=\theta$ $(k=1, \dots, n)$ dobijamo $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$, tj.

(3) $$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Kako je

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta),$$

posle stepenovanja sa n (n prirodan broj) dobijamo

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big)^n.$$

Na osnovu formule (3) nalazimo

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Prema tome, dokazali smo:

Stav 1. *Identitet*

(4) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

važi ako je n ceo broj (pozitivan, negativan ili nula), gde smo usvojili

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1.$$

Formula (4) zove se MOIVREova formula.

Polazeći od formule (1), dobija se

(5) $$\begin{aligned} &|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2|, \\ &\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1+\theta_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \qquad (z_1 z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Iz formule (2) sleduje:

(6) $$\Big|\prod_{k=1}^{n} z_k\Big| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|,$$

$$\operatorname{Arg} \prod_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg} z_k.$$

O formulama (5) i (6) bilo je već reči u 3.10.

Za glavne argumente u opštem slučaju ne važi

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Neka je na primer, $z_1=z_2=-1+i$. Glavni argumenti brojeva z_1, z_2 i njihovog proizvoda $z_1 z_2 = -2i$ su:

$$\arg z_1 = \arg z_2 = \frac{3}{4}\pi, \qquad \arg(z_1 z_2) = -\frac{1}{2}\pi.$$

Zaista, ovde je

$$\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2.$$

Za glavne argumente važi:

Stav 2. *Ako je $z_1 z_2 \neq 0$, tada je*

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi\lambda(z_1, z_2),$$

gde je

$$\begin{aligned} \lambda(z_1, z_2) &= +1 \quad (-2\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqq -\pi), \\ &= 0 \quad (-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqq \pi), \\ &= -1 \quad (\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqq 2\pi). \end{aligned}$$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| \operatorname{cis}\theta_1 \quad (-\pi < \theta_1 \leqq \pi), \\ z_2 &= |z_2| \operatorname{cis}\theta_2 \quad (-\pi < \theta_2 \leqq \pi), \end{aligned}$$

nalazi se

$$-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leqq 2\pi.$$

Da bi bilo

$$-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi\lambda(z_1, z_2) \leqq \pi,$$

za $\lambda(z_1, z_2)$ treba uzeti vrednosti koje su navedene u stavu 2.

Ako je $z_2 \neq 0$, za količnik $\frac{z_1}{z_2}$ dobija se trigonometrijski oblik

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis}\theta_1}{r_2 \operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}(-\theta_2) = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Odavde izlazi

$$\Big|\frac{z_1}{z_2}\Big| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0),$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \qquad (z_1 \neq 0 \text{ i } z_2 \neq 0).$$

3.12. NEKE PRIMENE MOIVREOVE FORMULE

Polazeći od MOIVREOVE formule

(1) $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

i izjednačujući realne i imaginarne delove, na primer, za $n = 2, 3, 4, 5, 6$, dobijaju se formule:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\sin 3x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$
$$= \sin x (4 \cos^2 x - 1),$$

$$\sin 4x = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x),$$

$$\sin 5x = \sin x (5 - 20 \sin^2 x + 16 \sin^4 x)$$
$$= \sin x (16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1),$$

$$\sin 6x = \sin x (32 \cos^5 x - 32 \cos^3 x + 6 \cos x);$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2 \sin^2 x$$
$$= 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$
$$= \cos x (1 - 4 \sin^2 x),$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1,$$

$$\cos 5x = \cos x (16 \cos^4 x - 20 \cos^2 x + 5)$$
$$= \cos x (16 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 1),$$

$$\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1.$$

Uopšte, izjednačujući realne i imaginarne delove leve i desne strane u (1) dobijamo:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots,$$

$$\sin nx = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \cdots,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$.

Iz poslednjih jednakosti sleduje

$$\operatorname{tg} nx = \frac{\binom{n}{1} \operatorname{tg} x - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 x + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 x - \cdots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 x + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 x - \cdots} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tako je, na primer,

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{5 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^4 x}, \qquad \operatorname{tg} 6x = \frac{6 \operatorname{tg} x - 20 \operatorname{tg}^3 x - 6 \operatorname{tg}^5 x}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}.$$

3.13. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA SABIRANJA, ODUZIMANJA, MNOŽENJA I DELJENJA KOMPLEKSNIH BROJEVA

3.13.1. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA SABIRANJA

Neka kompleksnim brojevima $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ odgovaraju redom tačke M_1 i M_2 u GAUSSovoj kompleksnoj ravni. Da bismo dobili sliku broja $z = z_1 + z_2$, konstruišimo paralelogram čija su tri temena u tačkama O, M_1, M_2. Četvrto teme ovog paralelograma, tačka M, je slika kompleksnog broja $z = z_1 + z_2$.

Pretpostavimo da je $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$. Tada je (videti sliku 3.13.1.1)

$$\operatorname{Re} z = OM' = OM_1' + M_1'M', \quad \operatorname{Im} z = M'M = M'M_2'' + M_2''M.$$

Kako je

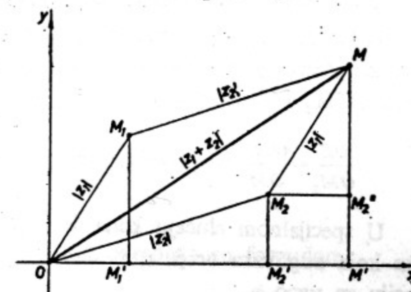
$$\Delta OM_1'M_1 \cong \Delta M_2M_2''M$$

kao i

$$OM_1' = x_1, \quad OM_2' = x_2,$$
$$M_1'M_1 = y_1, \quad M_2'M_2 = y_2,$$

imamo

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$



Sl. 3.13.1.1.

Slično se konstruiše slika kompleksnog broja $z_1 + z_2$ u slučaju kada je jedan ili više od brojeva x_1, x_2, y_1, y_2 negativan ili nula.

Iz trougla OM_1M, na osnovu osobina strana trougla, sleduje nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako trougao degeneriše u duž i ako se tačke M_1 i M_2 nalaze sa iste strane koordinatnog početka.

3.13.2. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA ODUZIMANJA

Neka kompleksnim brojevima $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ odgovaraju redom tačke M_1 i M_2 u GAUSSovoj kompleksnoj ravni. Da bismo odredili sliku razlike kompleksnih brojeva z_1 i z_2 postupimo na sledeći način:

Predstavimo razliku $z_1 - z_2$ u obliku

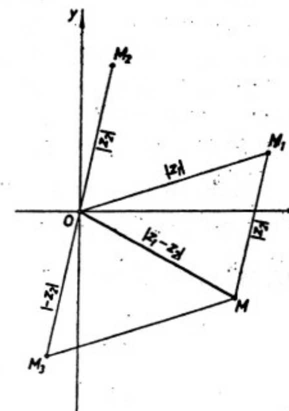
$$z = z_1 + (-z_2).$$

i konstruišimo tačku M_3 (slika 3.13.2.1) koja predstavlja sliku kompleksnog broja $-z_2$. Primetimo da kompleksni brojevi z_2 i $-z_2$ imaju iste module i da im se argumenti razlikuju za π. Posle toga, problem se svodi na sabiranje kompleksnih brojeva z_1 i $-z_2$.

Iz trougla OMM_1 izlazi nejednakost

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|,$$

jer je u trouglu razlika dve strane manja od treće strane. Znak jednakosti važi ako i samo ako trougao degeneriše u duž i ako se tačke M_1 i M_2 nalaze sa raznih strana od koordinatnog početka.



Sl. 3.13.2.1.

3.13.3. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA MNOŽENJA

Neka kompleksnim brojevima z_1 i z_2 odgovaraju respektivno tačke M_1 i M_2. Neka je $\arg z_1 = \varphi_1$, $\arg z_2 = \varphi_2$ $(0<\varphi_1, \varphi_2<\pi)$. Uzmimo na x-osi tačku E koja odgovara broju 1.

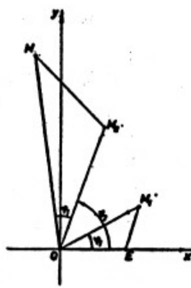
Postavimo kroz O pravu p koja sa pozitivnim smerom x-ose gradi ugao $\varphi_1+\varphi_2$. Kroz tačku M_2 postavimo pravu q koja sa OM_2 gradi ugao jednak uglu $\sphericalangle OEM_1$. Neka je M tačka preseka pravih p i q. (Kroz tačku M_2 mogu se postaviti dve prave koje sa OM_2 grade ugao jednak $\sphericalangle OEM_1$; treba izabrati takvu pravu da bude $\Delta\, OEM_1 \sim \Delta\, OM_2M$.)

Tački M odgovara kompleksan broj z takav da je $z = z_1 \cdot z_2$. Zaista je $\arg z = \arg z_1 + \arg z_2$, a iz sličnosti trouglova OEM_1 i OM_2M sleduje

$$\frac{OE}{OM_2} = \frac{OM_1}{OM} \Rightarrow |z| = |z_1|\ |z_2|.$$

U specijalnom slučaju kada je $|z_1|=1$ sleduje da se tačka koja odgovara broju $z_1\, z_2$ dobija ako tačka M_2 izvrši rotaciju za ugao φ_1.

Slično se konstruiše slika kompleksnog broja $z_1 z_2$ u slučaju kada je jedan ili oba argumenta <0.



Sl. 3.13.3.1.

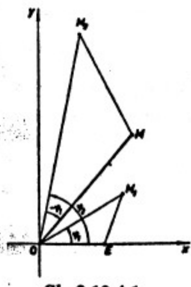
3.13.4. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DELJENJA

Neka kompleksnim brojevima z_1 i z_2 odgovaraju respektivno tačke M_1 i M_2 i neka je $\arg z_1 = \varphi_1$, $\arg z_2 = \varphi_2$. Pretpostavimo i ovde da je $0<\varphi_1, \varphi_2<\pi$. Uzmimo na x-osi tačku E kojoj odgovara broj 1.

Postavimo kroz O pravu p koja sa pozitivnim smerom x-ose gradi ugao $\varphi_2-\varphi_1$. Kroz tačku M_2 postavimo pravu q koja sa OM_2 gradi ugao jednak $\sphericalangle OM_1E$. Neka je M tačka preseka pravih p i q. (Od pravih koje prolaze kroz M_2 i i obrazuju sa OM_2 ugao jednak $\sphericalangle OM_1E$ treba izabrati onu pravu za koju je $\Delta\, OM_1E \sim \Delta\, OM_2M$.)

Tački M odgovara kompleksan broj z takav da je $z = \frac{z_2}{z_1}$. Zaista je $\arg z = \arg z_2 - \arg z_1$. Iz sličnosti trouglova OM_2M i OM_1E sleduje

$$\frac{OM}{OE} = \frac{OM_2}{OM_1} \Rightarrow |z| = \frac{|z_2|}{|z_1|}.$$



Sl. 3.13.4.1.

Slično se konstruiše slika količnika dva kompleksna broja u slučaju kada je jedan ili oba argumenta <0.

3.14. TRIGONOMETRIJSKO REŠENJE BINOMNE JEDNAČINE

Neka je data jednačina

(1) $\quad z^n = a \qquad (n\in \mathbf{N};\ a$ kompleksan broj).

Neka je $a\neq 0$. Jednačina (1) tada se naziva binomna jednačina. Ako su a i z dati u trigonometrijskom obliku

$$a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (-\pi<\varphi\leq\pi),$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

binomna jednačina (1) postaje

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Odavde sleduje

$$r^n = R, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \qquad (k\in \mathbf{Z}).$$

Prema tome, rešenja binomne jednačine (1) određena su formulom

(2) $$z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Da bismo dobili sva rešenja jednačine (1), dovoljno je staviti da je $k=0, 1, \ldots, n-1$. Zaista, svaki ceo broj k može se predstaviti u obliku $k = nq + l$, gde je n prirodan broj, q ceo broj i l nula ili prirodan broj $<n$.

Na osnovu ovog dobijamo

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi+2l\pi}{n} + 2q\pi,$$

te je

$$\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \cos\frac{\varphi+2l\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2l\pi}{n}.$$

Prema tome, ako u (2) stavimo

$$k = n,\ n+1, \ldots, 2n-1,\ 2n, \ldots,$$

dobijamo

$$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_0, \ldots$$

Stavimo li

$$k = -1, -2, \ldots, -n, -n-1, \ldots,$$

ili, što je isto,

$$k = (n-1)-n,\quad (n-2)-n, \ldots,\ 0-n,\quad (n-1)-2n,$$

dobijamo

$$z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_0, z_{n-1}, \ldots$$

Dokazaćemo sada da su sve vrednosti $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ među sobom različite. Pretpostavimo da ovo nije istinito. Tada postoje bar dva različita indeksa $\lambda, \mu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koje je $z_\lambda = z_\mu$. Dva kompleksna broja z_λ i z_μ su jednaka ako i samo ako je

$$\frac{\varphi+2\lambda\pi}{n} = \frac{\varphi+2\mu\pi}{n} + 2\nu\pi, \quad \text{tj.} \quad \frac{\lambda-\mu}{n} = \nu \quad (\nu \text{ ceo broj}).$$

Kako je $|\lambda-\mu|<n$ i kako je ν ceo broj, poslednja jednakost ne može postojati. Iz ove kontradikcije izlazi da su sva rešenja $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ jednačine (1) različita.

Prema tome, sva rešenja binomne jednačine (1) različita su i određena formulom

$$(3) \qquad z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Ova rešenja sažeto se označavaju $\sqrt[n]{a}$. Formulom (3) date su sve vrednosti korena $\sqrt[n]{a}$. Broj z_0 naziva se glavna vrednost korena $\sqrt[n]{a}$.

Ako je $a=0$, jednačina (1) ima jedino rešenje $z=0$, čija je višestrukost[1] n.

PRIMEDBA 1. U kompleksnoj ravni vrednosti n-tog korena iz a su afiksi temena pravilnog poligona od n strana koji je upisan u krugu $|z|=|a|$.

PRIMER 1. Ako je $a=1$, imamo binomnu jednačinu $z^n=1$ i sva njena rešenja su

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Ona se mogu predstaviti u obliku

$$z_0=1, \qquad z_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \qquad (k=1, \ldots, n-1).$$

Ovim rešenjima može se dati sledeća geometrijska interpretacija:

U kompleksnoj ravni n-ti koreni iz jedinice su afiksi temena pravilnog poligona od n strana koji je upisan u krugu $|z|=1$; jedno teme ovog poligona nalazi se u tački $z=1$.

3.15. PRESLIKAVANJE KRUGA HOMOGRAFIČKOM TRANSFORMACIJOM

U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema jednačina kruga glasi $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ (A, B, C, D realne konstante i $B^2+C^2-4AD>0$).

Ako je $A=0$, krug degeneriše u pravu. Ako je $B^2+C^2-4AD=0$, krug degeneriše u tačku.

Kako je $x=\frac{z+\bar z}{2}$, $y=\frac{z-\bar z}{2i}$, jednačina kruga postaje

$$Az\bar z + pz + \bar p\bar z + D = 0 \qquad (2p = B - iC).$$

Prema tome, jednačina

$$(1) \qquad Az\bar z + Bz + \bar B\bar z + D = 0 \qquad (A, D \text{ realni brojevi; } B \text{ kompleksan broj})$$

za $A\neq 0$ definiše krug, a za $A=0$ pravu.

[1] O višestrukim korenima videti 1.4 u odeljku *Polinomi*.

Ako u (1) stavimo $z=\frac{1}{w}$, dobijamo

$$(2) \qquad Dw\bar w + \bar B w + B\bar w + A = 0,$$

na osnovu čega zaključujemo:

Ako tačka z opiše krug (1), tačka $\frac{1}{z}(=w)$ opiše krug (2). Ovde se pretpostavlja da je $AD\neq 0$. Ako se ne uzima u obzir uslov $AD\neq 0$, zaključujemo:

Ako tačka z opiše krug (podrazumevajući ovde i pravu), tačka $\frac{1}{z}$ takođe opiše krug (koji može degenerisati u pravu).

To se formuliše i ovako: *Transformacijom* $w=\frac{1}{z}$ *krug se preslikava u krug.*

Dokazaćemo sada opštiji rezultat:

Stav 1. *Homografičkom* (MÖBIUSovom) *transformacijom*

$$(3) \qquad w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0; \quad a, b, c, d \text{ kompleksni brojevi})$$

krugovi i prave preslikavaju se u krugove i prave, pri čemu se krug može preslikati u krug ili pravu dok se prava može preslikati u pravu ili krug.

Dokaz. Iz (3) izlazi

$$z=\frac{b-dw}{cw-a}, \qquad \bar z=\frac{\bar b-\bar d\bar w}{\bar c\bar w-\bar a},$$

te jednačina (1) dobija oblik

$$(4) \qquad A_1 w\bar w + B_1 w + C_1\bar w + D_1 = 0,$$

gde je

$$A_1 = Ad\bar d - Bd\bar c - \bar B c\bar d + Dc\bar c, \qquad B_1 = -Ad\bar b + Bd\bar a + \bar B c\bar b - Dc\bar a,$$

$$C_1 = -Ab\bar d + Bb\bar c + \bar B a\bar d - Da\bar c, \qquad D_1 = Ab\bar b - Bb\bar a - \bar B a\bar b + Da\bar a.$$

Kako su A_1 i D_1 realni brojevi i $B_1=\bar C_1$, jednačina (4) određuje krug, što je trebalo dokazati.

Da bismo u kompleksnoj analizi mogli da dajemo geometrijska tumačenja, posmatrajmo dve ravni: ravan tačke z (z-ravan) i ravan tačke w (w-ravan). Ponekad uzimamo da se te dve ravni poklapaju i to tako da se poklapaju koordinatni počeci O i O_1 i odgovarajuće ose (Ox sa O_1u; Oy sa O_1v i to obe po pravcu i smeru) koordinatnih sistema Oxy i O_1uv koji leže u ravnima tačke z i tačke w.

Uzimajući u obzir ovu terminologiju, može se reći:

Homografičkom transformacijom (3) krug (1) u z-ravni preslikava se na krug (4) u w-ravni.

3.16. PRIMERI PRESLIKAVANJA OBLASTI HOMOGRAFIČKOM TRANSFORMACIJOM

Navešćemo neke primere preslikavanja pojedinih oblasti homografičkom transformacijom.

Zadržimo se na specijalnom slučaju homografičke transformacije

(1) $$w=\frac{i-z}{i+z}.$$

1° Ispitajmo najpre na šta se transformacijom (1) preslikava oblast

(2) $$\operatorname{Re} z \geqq 0 \wedge \operatorname{Im} z \geqq 0.$$

Iz (1) sleduje

(3) $$z=-i\frac{w-1}{w+1},$$

odakle je

(4) $$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(-i\frac{w-1}{w+1}+i\frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}\right)=\frac{2\operatorname{Im} w}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}.$$

Odavde je

$$\operatorname{Re} z \geqq 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{Im} w}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1} \geqq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} w \geqq 0,$$

jer, za $w \neq -1$, važi $w\overline{w}+w+\overline{w}+1=(w+1)(\overline{w}+1)=|w+1|^2>0.$

Iz (3) takođe dobijamo

(5) $$\operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=\frac{1}{2i}\left(-i\frac{w-1}{w+1}-i\frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}\right)=-\frac{w\overline{w}-1}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}.$$

Prema tome je

$$\operatorname{Im} z \geqq 0 \Rightarrow -(w\overline{w}-1) \geqq 0 \Rightarrow |w| \leqq 1,$$

tj. transformacijom (1) oblast (2) preslikava se na oblast $|w| \leqq 1 \wedge \operatorname{Im} w \geqq 0$ (videti sl. 3.16.1).

Sl. 3.16.1.

Na slikama 3.16.2 prikazane su koordinatne linije u z-ravni i njihove slike u w-ravni dobijene preslikavanjem (1).

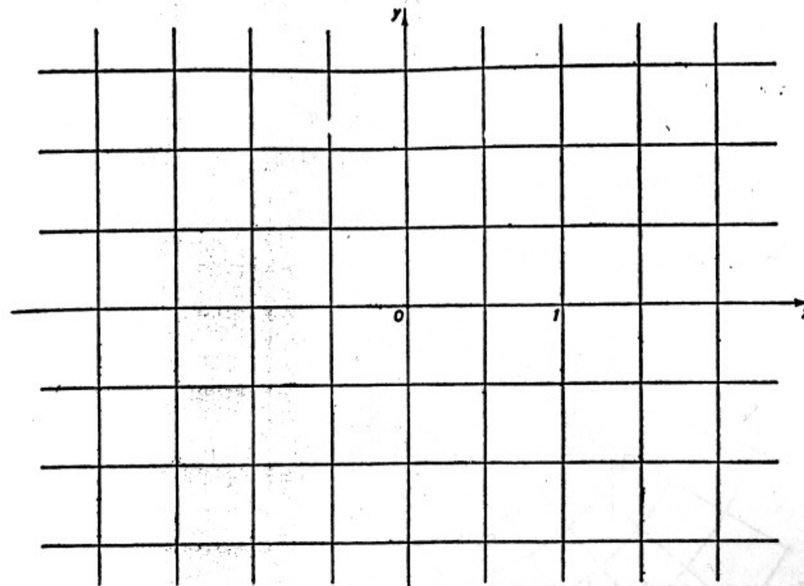
2° Ispitajmo sada na koju se oblast w-ravni preslikava transformacijom (1) oblast

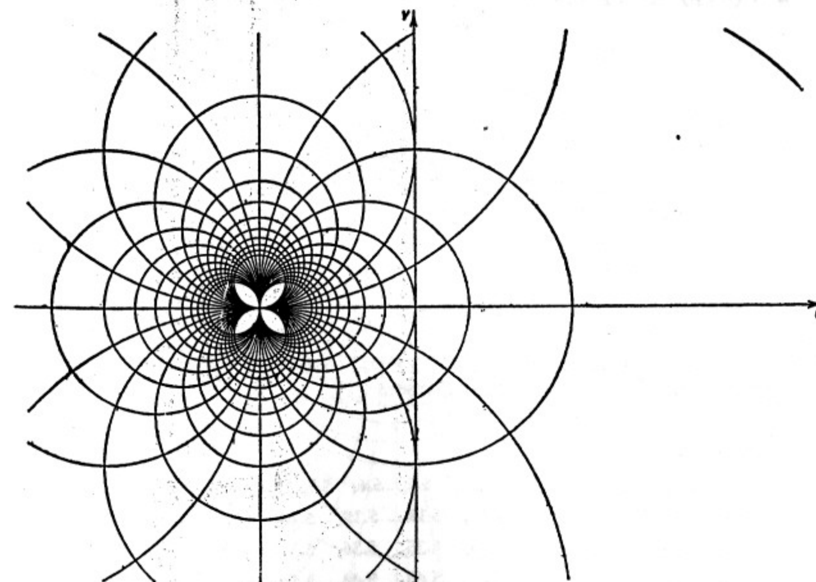
(6) $$y-mx \geqq 0 \wedge \operatorname{Re} z \geqq 0 \qquad (0 \leqq m < +\infty).$$

Oblast $\operatorname{Re} z \geqq 0$ preslikava se na oblast $\operatorname{Im} w \geqq 0$.

Ako u $y-mx \geqq 0$ zamenimo x i y pomoću (4) i (5), dobijamo

$$-\frac{w\overline{w}-1}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}-m\frac{2\operatorname{Im} w}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1} \geqq 0,$$





Sl. 3.16.2.

tj.

$$w\bar{w}+2\,m\,\mathrm{Im}\,w-1\leqq 0,$$

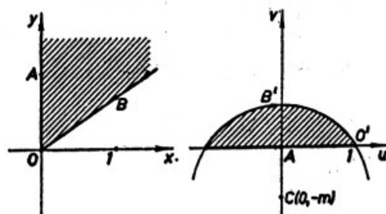
odakle je

$$u^2+v^2+2\,mv-1\leqq 0,\quad \text{tj.}\quad u^2+(v+m)^2\leqq 1+m^2.$$

Prema tome, oblast (6) preslikava se na deo kruga $u^2+(v+m)^2=1+m^2$, za koji je $v\geqq 0$ (videti sl. 3.16.3).

3° Ispitajmo, na kraju, na šta se transformacijom (1) preslikava oblast

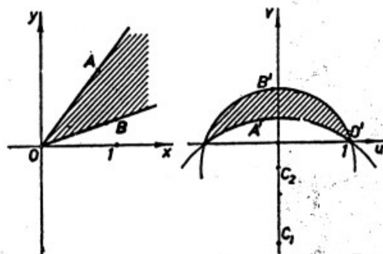
$$px\leqq y\leqq qx \qquad (q>p\geqq 0).$$



Sl. 3.16.3.

Na osnovu prethodnih transformacija, neposredno zaključujemo da se ova oblast transformacijom (1) preslikava na oblast (videti sl. 3.16.4)

$$u^2+(v+p)^2\leqq 1+p^2 \wedge u^2+(v+q)^2\geqq 1+q^2 \qquad (q>p\geqq 0).$$

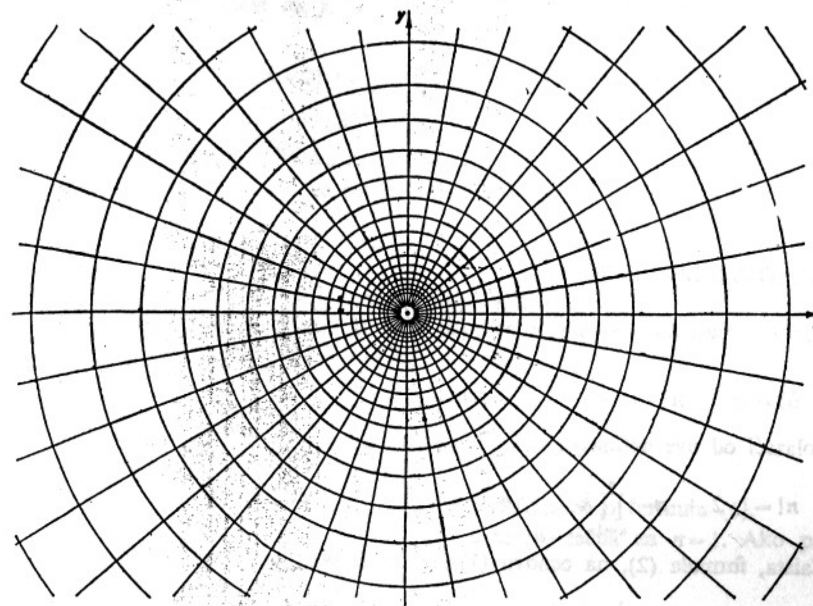


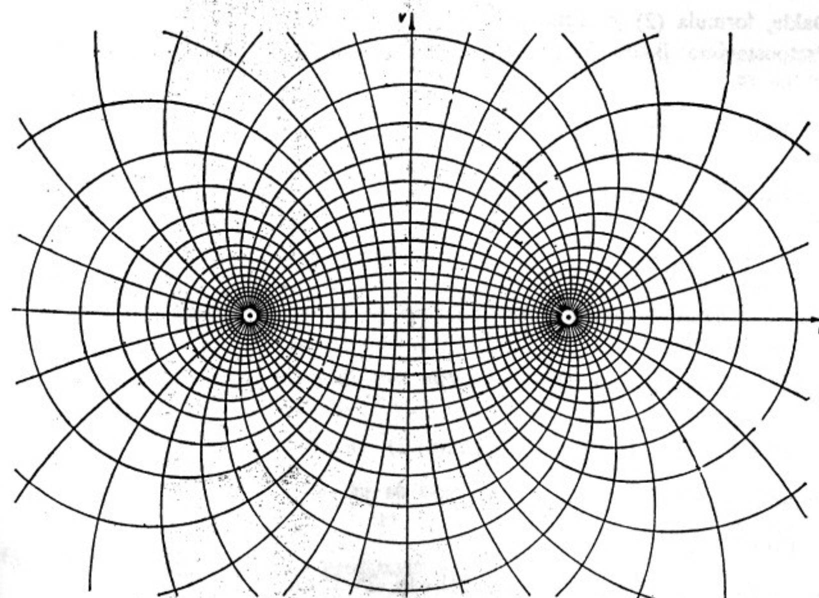
Sl. 3.16.4.

Na sl. 3.16.5 prikazane su prave $y=px$, krugovi $|z|=r$ u z-ravni i njihove slike u w-ravni dobijene preslikavanjem (1).

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34, 5.35, 5.36, 5.37, 5.38, 5.39, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.45, 5.46, 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51, 5.52, 5.53, 5.57, 5.58, 5.61, 5.62, 5.63, 5.64, 5.65, 5.66, 5.67, 5.68, 5.70, 5.71, 5.72, 5.73, 5.74, 5.75, 5.76, 5.77, 5.78, 5.79, 5.80, 5.81, 5.82, 5.83, 5.84, 5.85, 5.86, 5.87, 5.88, 5.89, 5.90, 5.91, 5.92, 5.93.





Sl. 3.16.5.

4. BINOMNA FORMULA

4.1. FAKTORIJELNE FUNKCIJE

Definicija 1. *Funkcija* $n \mapsto n!$ *(n prirodan broj ili nula) definisana je pomoću formula*

(1) $$0! = 1; \qquad n! = (n-1)!\, n \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Polazeći od ove definicije, dokazaćemo da je

(2) $$n! = 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad (n \geqq 1).$$

Zaista, formula (2), na osnovu (1), za $n = 1$, postaje

$$1! = 0! \cdot 1 = 1 = \prod_{k=1}^{1} k.$$

Dakle, formula (2) je tačna za $n = 1$.

Pretpostavimo li da je (2) tačno za neko $n\,(\geqq 1)$, posle množenja sa $n+1$ dobija se

$$n!\,(n+1) = \Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big)(n+1).$$

Na osnovu (1) odavde izlazi

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k.$$

Dakle, metodom matematičke indukcije dokazali smo da (2) važi za svaki prirodan broj n.

Definicija 2. *Funkcija* $n \mapsto n!!$ *(n prirodan broj ili nula) definisana je pomoću formula*

(3) $$0!! = 1, \quad 1!! = 1; \quad (n+2)!! = n!!\,(n+2) \quad (n \geqq 0).$$

Polazeći od ove definicije, dokazaćemo da je

(4) $$(2n)!! = n!\, 2^n.$$

Za $n = 0$ ova formula postaje $0!! = 0! \cdot 2^0$ i ona je tačna na osnovu definicija 1 i 2.

Ako se pretpostavi da je formula (4) tačna za neko $n\ (\geqq 0)$, na osnovu (3) i (1) je

$$\big(2(n+1)\big)!! = (2n+2)!! = (2n)!!\,(2n+2) = n!\,2^n(2n+2)$$
$$= n!\,(n+1)\,2^{n+1} = (n+1)!\,2^{n+1}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Polazeći od (3), slično se može dokazati da je

(5) $$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{n!\,2^n} \qquad (n \geqq 0).$$

Formulama (4) i (5) odgovaraju redom formule

(6) $$(2n)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n) \qquad (n \geqq 1),$$

(7) $$(2n+1)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n+1),$$

koje se često koriste.

Primera radi, matematičkom indukcijom dokazaćemo formulu (6).

Na osnovu (3) zaključujemo da je formula (6) tačna za $n = 1$. Ako pretpostavimo da (6) važi za n, tada važi i

$$(2n)!!\,(2n+2) = 2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2),$$

tj. na osnovu (3),

$$(2n+2)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n+2).$$

Prema tome, ako (6) važi za n, tada važi i za $n+1$. Ovim je matematičkom indukcijom dokazana jednakost (6).

Slično se dokazuje i (7).

4.2. FUNKCIJA $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$

Definicija 1. *Ako su n i k nenegativni celi brojevi, funkcija* $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$ *definisana je pomoću formula*

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad (k \in \mathrm{N}).$$

Na osnovu ove definicije je $\binom{n}{k} = 0$ ako je $n < k$ (n i k prirodni brojevi).

Kako je

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

funkciju $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$ možemo predstaviti u obliku

(1) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Stav 1. *Za funkciju* $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$ *važe sledeće formule:*

(2) $$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

(3) $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

(4) $$\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1}.$$

Primedba 1. Često se koristi i oznaka $C_n^k=\binom{n}{k}$.

Dokaz. Kako je

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{n-k},$$

formula (2) je tačna.

Formula (3) dokazuje se na sledeći način:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}=\frac{n!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Kako je

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)\,n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)!}\cdot\frac{k+1}{n+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,\frac{k+1}{n+1}=\binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1},$$

formula (4) je dokazana.

Opštije od definicije 1, daje se sledeća definicija:

Definicija 2. *Ako je a realan broj i k nenegativan ceo broj, funkcija* $(a, k) \mapsto \binom{a}{k}$ *definisana je pomoću formula*

$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-\overline{k-1})}{k!} & (a \text{ realan broj; } k \text{ prirodan broj}),\\ 1 & (a \text{ realan broj; } k=0).\end{cases}$$

Ako $a\,(<k)$ nije prirodan broj, tada $\binom{a}{k}$ nije jednako nuli. Tako, na primer,

$$\binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=-\frac{1}{8}.$$

Formula (2) ne važi ako se n zameni sa a (a ma kakav realan broj), dok formule (3) i (4) ostaju u važnosti.

Primenom formule

$$\binom{a}{k}+\binom{a}{k+1}=\binom{a+1}{k+1}$$

dobijaju se jednakosti

$$\binom{a+n+1}{n}=\binom{a+n}{n-1}+\binom{a+n}{n},$$
$$\binom{a+n}{n-1}=\binom{a+n-1}{n-2}+\binom{a+n-1}{n-1},$$
$$\vdots$$
$$\binom{a+2}{1}=\binom{a+1}{0}+\binom{a+1}{1},$$
$$\binom{a+1}{0}=\binom{a}{0}.$$

Odavde, posle sabiranja, sleduje identitet

$$\binom{a+n}{n}+\binom{a+n-1}{n-1}+\cdots+\binom{a+1}{1}+\binom{a}{0}=\binom{a+n+1}{n},$$

gde je n nula ili prirodan broj i a realan broj.

4.3. NEWTONOVA BINOMNA FORMULA

Stav 1. *Za svaki prirodan broj n važi formula*

(1) $$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+\binom{n}{n}b^n,$$

koja se zove binomna formula ili Newtonova *formula*[1].

Dokaz. Formula (1) može se predstaviti u sažetijem obliku

(2) $$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

Formulu (1), odnosno (2), dokazaćemo metodom matematičke indukcije. Za $n=1$ formula (1) je tačna, jer se dobija

$$a+b=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b.$$

Ako se iz pretpostavke

(3) $$(a+b)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$$

izvede zaključak

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r,$$

formula (1) je tačna za prirodan broj $n=k+1$ ako je tačna za $n=k$.

[1] Ova formula može se naslutiti posmatranjem sledećih partikularnih slučajeva:
$a+b=a+b$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; itd.

Polazeći od $(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$ i vodeći računa o induktivnoj pretpostavci (3), posle množenja, dobija se

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r+\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{k}b^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-}b^r+\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^r$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r.$$

Prema tome, ako je formula (3) istinita za $n=k$, ona je istinita i za $n=k+1$.

Ovim je završen induktivni dokaz. Dakle formula (3) je tačna za svaki prirodan broj n.

Na osnovu formule (3) zaključuje se da se $(a+b)^n$ razvija u polinom od $n+1$ članova. Koeficijenti ovih članova su prirodni brojevi

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\dots,\binom{n}{r},\dots,\binom{n}{n}.$$

Oni se zovu *binomni koeficijenti za izložilac n*. Možemo ih obrazovati pomoću PASCALovog trougla kao što je prikazano na sl. 4.3.1.

Zbog simetrije binomnih koeficijenata, PASCALov trougao se često piše i u kraćem obliku, kao što je prikazano na sl. 4.3.2.

```
                1
             1     1
          1     2     1
       1     3     3     1
    1     4     6     4     1
 1     5    10    10     5     1
                :
```

Sl. 4.3.1.

```
1
1  1
1  2   1
1  3   3   1
1  4   6   4   1
1  5  10  10   5   1
:
```

Sl. 4.3.2.

Elementi PASCALovog trougla formiraju se na osnovu formule (3) iz prethodnog paragrafa.

Maksimalni binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ za n fiksno može se odrediti na sledeći način. Nejednakost

$$\binom{n}{k-1}\leq\binom{n}{k}\qquad(n\text{ fiksno}),$$

tj.

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}\leq\frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

važi ako je

$$k\leq n-k+1,\ \text{tj.}\ k\leq\frac{n+1}{2}.$$

Ako je fiksno n parno, maksimalna vrednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ dobija se za $k=\frac{n}{2}$.

Ako je fiksno n neparno, maksimalna vrednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ dobija se za

$$k=\frac{n+1}{2}\quad\text{i}\quad k=\frac{n-1}{2}.$$

Može se i ovako reći: Maksimalni binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ za n fiksno dobija se za $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (tj. za celi deo od $\frac{n+1}{2}$).

Stav 1. *Za svaki prirodni broj n važi trinomna formula*

$$(4)\qquad (x+y+z)^n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}c(i,j,n)\,x^i y^j z^{n-i-j},$$

gde je

$$c(i,j,n)=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}.$$

Dokaz. Primenjujući binomnu formulu, dobijamo

$$(5)\qquad (x+y+z)^n=(x+(y+z))^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(y+z)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}y^j z^{n-i-j}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}x^i y^j z^{n-i-j}.$$

Kako je

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\,\frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!}=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}=c(i,j,n),$$

iz (5) se dobija (4).

Primetimo da za funkciju $c(i,j,n)$ važi sledeća rekurentna formula

$$c(i,j,n)=c(i,j,n-1)+c(i,j-1,n-1)+c(i-1,j,n-1)$$

koja se dokazuje analogno formuli (3) iz 4.2. Prema tome, koeficijenti $c(i,j,n)$ u trinomnoj formuli mogu se formirati pomoću jedne piramide, pri čemu se svaki koeficijent $c(i,j,n)$ dobija kao zbir tri elementa koji se nalaze u piramidi iznad njega.

Formule (1) i (4) su partikularni slučajevi opštije polinomne formule:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

u kojoj se sumiranje vrši tako da $k_1,\dots,k_m$ uzimaju sve vrednosti iz skupa $\{1,\dots,n\}$ i da je pri tome $k_1+\cdots+k_m=n$.

Dokaz ove formule može se naći, na primer, u knjizi: D. S. MITRINOVIĆ: *Matematička indukcija. Binomna formula. Kombinatorika*, drugo izdanje. Beograd 1970, str. 58—59.

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.13;
I. B. K: 4.2, 4.17;
A: 4.10, 4.11, 4.12, 4.14, 4.15, 4.35.

5. KOMBINATORIKA

5.1. VARIJACIJE

Neka je dat skup $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata.

Definicija 1. *Varijacije klase k od $n\,(n \geq k)$ elemenata skupa E su uređene k-torke sastavljene od različitih elemenata skupa E.*

Ekvivalentne definicije ovoj su:

Definicija 2. *Varijacije klase k od $n\,(n \geq k)$ elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su sva biunivoka preslikavanja skupa $E_k=\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

Definicija 3. *Varijacije klase k od $n\,(n \geq k)$ elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su raspoređi od kojih svaki ima k različitih elemenata, smatrajući dva rasporeda kao različita ako nisu sastavljeni od istih elemenata ili ako nemaju isti poredak.*

Svaki element možemo uzeti posebno:

$$a_1,$$
$$a_2,$$
$$\vdots$$
$$a_n.$$

To su varijacije prve klase. Njih je na broju n, što ćemo izraziti formulom

$$V_n^1=n.$$

Možemo grupisati po dva i dva elementa:

$$a_1 a_2, \quad a_1 a_3, \quad \ldots, \quad a_1 a_n,$$
$$a_2 a_1, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_2 a_n,$$
$$\vdots$$
$$a_n a_1, \quad a_n a_2, \quad \ldots, \quad a_n a_{n-1},$$

To su varijacije druge klase. Na broju ih je

$$V_n^2=n\,(n-1).$$

Ako varijaciji $a_1 a_2$ redom zdesna pridružujemo elemente

$$a_3, a_4, \ldots, a_n,$$

dobijamo $n-2$ rasporeda od po tri elementa: to su varijacije treće klase.

Kako varijacija druge klase ima $n\,(n-1)$, broj varijacija treće klase je $V_n^3=n\,(n-1)\,(n-2)$.

Na osnovu ovoga, možemo naslutiti da važi sledeći stav:

Stav 1. *Broj varijacija od n elemenata klase $k\,(\leq n)$ iznosi*

(1) $$V_n^k=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-\overline{k-1})=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Dokaz. Dokazaćemo sada, metodom matematičke indukcije po k, da je navedena formula zaista tačna. Kao što smo napred videli, ona je tačna za $k=1$.

Pretpostavimo da je formula (1) tačna za $k=\nu\,(\nu \leq n-1)$, tj. pretpostavimo da ova formula određuje broj varijacija klase ν od kojih nijedna nije izostavljena niti je ma koja ponovljena.

Uočimo jednu varijaciju klase ν:

(2) $$a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} a_\nu.$$

Tu ne ulaze elementi $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_n$ kojih je na broju $n-\nu$. Ako varijaciji (2) pridružimo redom zdesna svaki od navedenih elemenata, dobijamo sledećih $n-\nu$ varijacija klase $\nu+1$:

$$a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} a_\nu a_{\nu+1}, \quad a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} a_\nu a_{\nu+2}, \quad \ldots, \quad a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} a_\nu a_n.$$

Ako na isti način postupimo sa svima varijacijama klase ν od n elemenata, dobijamo ukupno $n\,(n-1)\cdots(n-\overline{\nu-1})\,(n-\nu)$ varijacija klase $\nu+1$ od n elemenata, tj.

(3) $$V_n^{\nu+1}=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-\nu).$$

Dokazaćemo sada da nijedna varijacija klase $\nu+1$ nije izostavljena niti ponovljena. Uzmimo jednu proizvoljnu varijaciju klase $\nu+1$, recimo

(4) $$a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_\nu} a_{s_{\nu+1}} \qquad (1 \leq s_i \leq n;\ i=1, \ldots, \nu+1),$$

pa ćemo dokazati da je ona zaista formirana, tj. da nije izostavljena. Ako izostavimo element $a_{s_{\nu+1}}$, dobijamo

(5) $$a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_\nu},$$

što predstavlja varijaciju klase ν koja je po pretpostavci sigurno bila obrazovana. Ovoj smo varijaciji pridružili zdesna slova koja se u njoj nisu javljala, pa smo na taj način nesumnjivo formirali i varijaciju (4).

Dve varijacije klase $\nu+1$ obrazovane su na jedan od sledeća dva načina:

Uzeta je jedna varijacija klase ν, recimo (5), pa su joj zdesna pridružena dva razna slova. Tako dobijene varijacije klase $\nu+1$ različite su.

Uzete su dve različite varijacije klase ν koje se razlikuju bilo sastavom elemenata, bilo samo poretkom elemenata, pa im je zdesna pridruženo jedno slovo, koje se u njima ne javlja. Tako dobijene varijacije klase $\nu+1$ takođe su različite.

Ovim smo dokazali da je formula (1) tačna za svako $k \leq n$, tj. formula (1) određuje broj svih varijacija klase $k \leq n$ od n elemenata.

U stvari iz pretpostavke da je formula tačna za $k=\nu$, zaključili smo da je tačna za $k=\nu+1$. Kako je uz to ova formula tačna za $k=1$, ona je tačna za svaki prirodan broj $k\,(1 \leq k \leq n)$.

5.2. PERMUTACIJE

Definicija 1. *Permutacije od n elemenata su varijacije klase n od n elemenata.*

Ovoj definiciji ekvivalentna je sledeća:

Definicija 2. *Permutacije su biunivoka preslikavanja skupa E na samog sebe.*

Iz stava 1 u 5.1 neposredno sleduje:

Stav 1. *Broj permutacija od n elemenata je*

$$P_n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

5.3. KOMBINACIJE

Definicija 1. *Kombinacije klase k od $n\,(n \geq k)$ elemenata su one varijacije klase k od tih elemenata koje se smatraju da su jednake ako su sastavljene od istih elemenata.*

Umesto ove definicije, može se uzeti njoj ekvivalentna:

Definicija 2. *Kombinacija klase k od $n\,(n \geq k)$ elemenata skupa E je svaki njegov podskup koji se sastoji od k i samo k elemenata.*

Stav 1. *Broj kombinacija klase k od n elemenata $(n \geq k)$ je*

(1) $$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Jedna kombinacija klase k od n elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je

$$a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_k} \quad (1 \leq s_i \leq n; \quad i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (s_i \text{ različiti})$$

i svaka permutacija ovog rasporeda, po definiciji, je jedna ista kombinacija.

Svaka permutacija ovog rasporeda je jedna varijacija klase k od n elemenata. Ukupno ih je $k!$. Prema tome, broj C_n^k kombinacija klase k od $n\,(\geq k)$ elemenata manji je $k!$ puta od broja V_n^k varijacija klase k od istih elemenata, pa je

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

5.4. VARIJACIJE SA PONAVLJANJEM

Posmatrajmo sada n različitih elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i pretpostavimo da je svaki od njih dat u dovoljnom broju.

Definicija 1. *Varijacije sa ponavljanjem klase k od n elemenata $a_1, a_2, \ldots a_n$ su uređene k-torke od elemenata skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

Varijacije prve klase su:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Varijacije druge klase sa ponavljanjem su:

$$\begin{array}{l} a_1 a_1, \quad a_1 a_2, \quad a_1 a_3, \quad \ldots, \quad a_1 a_n, \\ a_2 a_1, \quad a_2 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_2 a_n, \\ \vdots \\ a_n a_1, \quad a_n a_2, \quad a_n a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_n. \end{array}$$

Broj varijacija sa ponavljanjem druge klase od n različitih elemenata je

$$\overline{V}_n^2 = n^2.$$

Polazeći od jedne varijacije druge klase, na primer od $a_1 a_1$, mogu se obrazovati sledeće varijacije sa ponavljanjem treće klase:

$$a_1 a_1 a_1, \quad a_1 a_1 a_2, \quad \ldots, \quad a_1 a_1 a_n,$$

kojih je ukupno n. Kako varijacija sa ponavljanjem druge klase ima n^2, broj varijacija sa ponavljanjem treće klase iznosi

$$\overline{V}_n^3 = n^3.$$

Na osnovu ovoga naslućujemo da važi:

Stav 1. *Broj varijacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata dat je formulom*

(1) $$\overline{V}_n^k = n^k.$$

Dokaz. Kao što smo dokazali, formula (1) je tačna za $k = 1, 2, 3$. Pretpostavimo sada da je ona tačna za neko k i posmatrajmo jednu varijaciju klase k, na primer

$$a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} \ldots a_{s_k} \qquad (1 \leq s_i \leq n; \quad i = 1, \ldots, k).$$

Ako se ovoj varijaciji redom zdesna pridružuju elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dobija se n varijacija klase $k+1$. Na osnovu induktivne hipoteze varijacija klase k ima n^k. Dakle, varijacija klase $k+1$ ima ukupno $n^k \cdot n = n^{k+1}$.

Prema tome, indukcijom smo dokazali (1).

5.5. PERMUTACIJE SA PONAVLJANJEM

Definicija 1. *Uređene n-torke takve da se element a_1 pojavljuje α_1 puta, element a_2 pojavljuje se α_2 puta, ..., element a_k pojavljuje se α_k puta, nazivaju se permutacije sa ponavljanjem.*

Neka je dato n elemenata od kojih su $\alpha\,(\leq n)$ međusobno jednaki. Kada bi svi elementi bili različiti, broj permutacija bi iznosio $n!$. Kako su α elemenata međusobno jednaki, svaka se permutacija ponavlja $\alpha!$ puta.

Broj permutacija od n elemenata, od kojih su $\alpha\,(\leq n)$ međusobno jednaki, iznosi

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{n!}{\alpha!}.$$

Uopšte, važi sledeći:

Stav 1. *Neka je dato n elemenata od kojih je $k\,(k \leq n)$ različitih i to neka se prvi javlja α_1 puta, drugi α_2 puta, ..., k-ti α_k puta $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n\right)$. Tada je broj permutacija dat obrascem*

$$P_n^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_k!},$$

5.6. KOMBINACIJE SA PONAVLJANJEM

Uočimo n različitih elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i pretpostavimo da je svaki od njih dat u dovoljnom broju.

Kombinacije druge klase sa ponavljanjem su:

$$\begin{array}{lllll} a_1a_1, & a_1a_2, & \ldots, & a_1a_{n-1}, & a_1a_n, \\ & a_2a_2, & \ldots. & a_2a_{n-1}, & a_2a_n, \\ & & & & \vdots \\ & & & a_{n-1}a_{n-1}, & a_{n-1}a_n, \\ & & & & a_na_n. \end{array} \tag{1}$$

Ovih kombinacija ukupno ima

$$n+(n-1)+\cdots+1=\binom{n+1}{2}.$$

Polazeći od prve vrste u shemi (1), dobijaju se sledeće kombinacije treće klase sa ponavljanjem:

$$\begin{array}{lllll} a_1a_1a_1, & a_1a_1a_2, & \ldots, & a_1a_1a_{n-1}, & a_1a_1a_n, \\ & a_1a_2a_2, & \ldots. & a_1a_2a_{n-1}, & a_1a_2a_n, \\ & & & & \vdots \\ & & & a_1a_{n-1}a_{n-1}, & a_1a_{n-1}a_n, \\ & & & & a_1a_na_n. \end{array}$$

Ovih kombinacija ukupno ima $\binom{n+1}{2}$.

Polazeći od druge vrste u shemi (1), dobijaju se sledeće kombinacije treće klase sa ponavljanjem:

$$\begin{array}{llll} a_2a_2a_2, & a_2a_2a_3, & \ldots, & a_2a_2a_n, \\ & a_2a_3a_3, & \ldots, & a_2a_3a_n, \\ & & & \vdots \\ & & & a_2a_na_n. \end{array}$$

Svega ih je $\binom{n}{2}$.

Produžujući tako, dolazimo do kombinacija treće klase sa ponavljanjem, koje odgovaraju pretposlednjoj vrsti sheme (1):

$$\begin{array}{ll} a_{n-1}a_{n-1}a_{n-1}, & a_{n-1}a_{n-1}a_n, \\ & a_{n-1}a_na_n, \end{array}$$

dok poslednjoj vrsti sheme (1) odgovara kombinacija

$$a_na_na_n.$$

U pretposlednjoj shemi ih je $\binom{3}{2}$, a u poslednjoj $\binom{2}{2}$.

Ukupan broj kombinacija treće klase sa ponavljanjem je

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{2}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Ako sa $\overline{C}_n^k$ označimo broj kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase k, tada imamo formule

$$\overline{C}_n^2=\binom{n+1}{2},\quad \overline{C}_n^3=\binom{n+2}{3},$$

koje smo napred izveli.

Na osnovu ovog možemo naslutiti da važi:

Stav 1. *Broj kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase k je*

$$\overline{C}_n^k=\binom{n+k-1}{k}. \tag{2}$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom po k dokazaćemo formulu (2). Kao što smo već dokazali, za $k=1$, $k=2$, i $k=3$ formula (2) je tačna. Pretpostavićemo da je ona tačna za $k=1, 2, \ldots, \nu$.

Na osnovu induktivne hipoteze kombinacija klase $\nu+1$ od n elemenata, koje počinju sa $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, redom ima

$$\binom{n+\nu-1}{\nu},\ \binom{n+\nu-2}{\nu},\ \binom{n+\nu-3}{\nu},\ \ldots,\ \binom{\nu}{\nu}.$$

Ukupan broj svih kombinacija klase $\nu+1$ sa ponavljanjem od n elemenata je

$$\overline{C}_n^{\nu+1}=\binom{n+\nu-1}{\nu}+\binom{n+\nu-2}{\nu}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}=\binom{n+\nu}{\nu+1}.$$

Prema tome, ako je formula (2) tačna za $k=\nu$, ona je tačna i za $k=\nu+1$.

Ovim je dokazana formula (2).

5.7. PARNE I NEPARNE PERMUTACIJE

Definicija 1. *Permutaciju $a_1a_2\ldots a_n$ zvaćemo glavna (polazna) permutacija, a naznačeni poredak elemenata normalan.*

Posmatrajmo sada proizvoljnu permutaciju

$$a_{s_1}a_{s_2}\ldots a_{s_j}\ldots a_{s_k}\ldots a_{s_n}\qquad (1\leq s_i\leq n;\ i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ako je

$$s_j<s_k\qquad (1\leq s_j\leq n;\ 1\leq s_k\leq n),$$

kažemo da elementi a_{s_j} i a_{s_k} zauzimaju normalan položaj.

Ako je $s_j>s_k$ kažemo da elementi a_{s_j} i a_{s_k} obrazuju inverziju.

Broj inverzija permutacije (1) odredićemo na sledeći način:

Uporedićemo po veličini s_1 sa brojevima $s_2, s_3, \ldots, s_n$; zatim s_2 sa brojevima $s_3, s_4, \ldots, s_n$; i najzad s_{n-1} sa s_n.

Neka je p ukupan broj svih inverzija. Ako je p parno, za permutaciju se kaže da je *parne klase*. Ako je p neparno, permutacija je *neparne klase*. Glavna permutacija nema nijedne inverzije i ona se uvršćuje u permutacije parne klase.

PRIMER 1. Ako je polazna permutacija $a_1a_2a_3a_4a_5$, u permutaciji $a_1a_4a_3a_5a_2$ imamo sledeće inverzije (a_4, a_3), (a_4, a_2), (a_3, a_2), (a_5, a_2). Ova permutacija je parne klase, ili kraće, permutacija je parna.

Definicija 2. *Ako dva elementa u permutaciji međusobno promene svoja mesta, kaže se da je izvršena transpozicija ovih elemenata.*

Stav 1. *Transpozicijom dva elementa u jednoj permutaciji menja se klasa ove permutacije.*

Dokaz. Izvršimo transpoziciju elemenata čiji su indeksi s_j i s_k.

Neka su ovi elementi susedni (tj. između ovih elemenata nema drugih), i neka je broj inverzija u posmatranoj permutaciji p. Tada je, po le transpozicije, broj inverzija $p-1$ ili $p+1$ prema tome da li je $s_j > s_k$ ili $s_j < s_k$.

Dakle, stav je istinit ako su a_{s_j} i a_{s_k} susedni elementi u permutaciji.

Pretpostavimo da se između elemenata a_{s_j} i a_{s_k} u posmatranoj permutaciji nalazi r elemenata. Tada se permutacija može napisati u obliku

(2) $\quad A\, a_{s_j}\, B\, a_{s_k}\, C$

(A označava sve elemente koji se nalaze ispred a_{s_j}; B označava skup od r elemenata koji se nalaze između a_{s_j} i a_{s_k}, dok C označava sve elemente koji se nalaze iza a_{s_k}).

Posle transpozicije elemenata a_{s_j} i a_{s_k} permutacija (2) postaje

(3) $\quad A\, a_{s_k}\, B\, a_{s_j}\, C.$

Ako a_{s_j} i elementi u B izvrše jedno za drugim r transpozicija, permutacija (2) postaje

$$A B\, a_{s_j}\, a_{s_k}\, C.$$

Primedba 1. Prvo se permutuju a_{s_j} i prvi element u B; zatim a_{s_j} i drugi element u $B, \ldots$; na kraju a_{s_j} i poslednji element u B.

Ako sada u ovoj permutaciji element a_{s_j} izvrši redom $r+1$ transpozicija sa a_{s_j} i elementima u B, dobija se permutacija (3).

Pri prelazu od permutacije (2) na permutaciju (3) izvršili smo ukupno $2r+1$ transpozicija.

Kao što smo maločas dokazali, svakom transpozicijom dva susedna elemenata menja se klasa permutacije. Kako smo izvršili neparan broj transpozicija susednih elemenata, zaključujemo da se transpozicijom dva ma koja elemenata menja klasa permutacije.

Primer 2. Ako u parnoj permutaciji $a_1\, a_4\, a_3\, a_5\, a_2$ izvršimo transpoziciju elemenata a_4 i a_5, dobijamo permutaciju $a_1\, a_5\, a_3\, a_4\, a_2$.

U ovoj permutaciji imamo inverzije:

$$(a_5, a_3),\ (a_5, a_4),\ (a_5, a_2),\ (a_3, a_2),\ (a_4, a_2).$$

Prema tome, nova permutacija je promenila klasu, tj. postala neparna što je u skladu sa dokazanim stavom.

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 3.1, 3.2, 3.3, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22.

A: 3.1. 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.18.

LINEARNA ALGEBRA

1. MATRICE

1.1. POJAM MATRICE LINEARNE TRANSFORMACIJE

Neka su (x_1, x_2) koordinate jedne tačke P u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Ox_1x_2. Ako ovaj koordinatni sistem izvrši rotaciju za ugao θ, u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu, oko koordinatnog početka O, tada se dobija nov Dekartov pravougli koordinatni sistem Oy_1y_2. Između koordinata (x_1, x_2) tačke P u sistemu Ox_1x_2 i koordinata (y_1, y_2) iste tačke P u sistemu Oy_1y_2 postoji veza

$$(1) \qquad y_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \quad y_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta.$$

Kako su y_1 i y_2 linearne funkcije od x_1 i x_2, kaže se da smo pomoću (1) izvršili *linearnu transformaciju* promenljivih x_1 i x_2 u promenljive y_1 i y_2.

Uopšte, prelaz od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ na nove promenljive $y_1, \ldots, y_n$ pomoću formula

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \quad (a_{ik} \in \mathbf{C} \text{ za } i, k = 1, \ldots, n) \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

zove se *linearna transformacija* promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ u promenljive $y_1, \ldots, y_n$.

Izdvojimo koeficijente uz $x_1, \ldots, x_n$ i, da bismo istakli da čine celinu, stavimo ih između dva para uspravnih crta. Na taj način dobijamo shemu

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Ova shema zove se *matrica linearne transformacije* (2) ili ukratko *matrica*.

Koeficijenti a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ zovu se *elementi* matrice.

Elementi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, \ldots, n)$ čine i-tu *vrstu* matrice.

Elementi $a_{1k}, \ldots, a_{nk}$ $(k = 1, \ldots, n)$ čine k-tu *kolonu* matrice.

Elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ čine *glavnu dijagonalu* matrice.

Elementi $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ čine *sporednu dijagonalu* matrice.

Matrica (3) kraće se simbolizuje

$$A = \| a_{ik} \|_1^n.$$

Posmatraju se takođe sheme brojeva a_{ik} u kojima broj vrsta nije jednak broju kolona, naime:

$$(4) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Ova shema zove se *pravougaona matrica*. Ako je $m = n$, matrica se zove *kvadratna matrica reda n*.

Pravougaona matrica ukratko se označava

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, n)$$

ili još kraće

$$A = \| a_{ik} \|_{m,n}.$$

Pravougaonoj matrici (4) takođe se pridružuje linearna transformacija:

$$(5) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

(5) se može izraziti u sažetijem obliku $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Linearna transformacija (5) jednoznačno određuje matricu (4), i obrnuto. Stoga se, umesto o linearnoj transformaciji, može govoriti o matrici koja joj odgovara; važi i obrnuto.

Za matricu koja ima m vrsta i n kolona, kaže se da je tipa $m \times n$, ili formata $m \times n$, ili dimenzije $m \times n$, ili prosto matrica $m \times n$.

Svaka vrsta matrice $m \times n$ takođe je jedna matrica tipa $1 \times n$. Svaka kolona matrice $m \times n$ je matrica tipa $m \times 1$.

Matrica tipa 1×1 sastoji se samo od jednog elementa. Usvaja se da se matrica tipa 1×1 poistovećuje sa njenim jedinim elementom.

Matrica tipa $1 \times n$, tj. matrica

$$\| a_1 \ a_2 \ldots a_n \|$$

naziva se *matrica-vrsta*, a matrica tipa $m \times 1$, tj. matrica

$$\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

matrica-kolona. Matrice vrste i matrice kolone nazivaju se i *vektori*.

Skup svih vektora tipa $1 \times n$ sa realnim odnosno kompleksnim elementima obeležava se sa $\mathbf{R}_n$ odnosno sa $\mathbf{C}_n$.

Skup svih vektora tipa $n \times 1$ sa realnim odnosno kompleksnim elementima obeležava se sa $\mathbf{R}^n$ odnosno sa $\mathbf{C}^n$.

1.2. JEDNAKOST DVE MATRICE

Definicija 1. *Dve matrice jednake su ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.*

Drugim rečima, ako su matrice $A=\|a_{ik}\|$ i $B=\|b_{ik}\|$ tipa $m\times n$, one su jednake ako je ispunjeno mn uslova:

$$a_{ik}=b_{ik}\qquad (i=1,\dots,m;\quad k=1,\dots,n).$$

Stav 1. *Jednakost matrica ima osobine refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti, tj.*

$$A=A \qquad \textit{(refleksivnost)},$$
$$A=B\ \Rightarrow\ B=A \qquad \textit{(simetričnost)},$$
$$(A=B\wedge B=C)\ \Rightarrow\ A=C \qquad \textit{(tranzitivnost)}.$$

Dokaz. Ove osobine neposredno sleduju iz definicije 1 i osobina jednakosti kompleksnih brojeva.

1.3. SABIRANJE MATRICA

Posmatrajmo dva sistema linearnih transformacija

(1)
$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$

i

(2)
$$z_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3,$$
$$z_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3.$$

Uvedimo nove promenljive w_1 i w_2 pomoću formula

$$w_1=y_1+z_1,\quad w_2=y_2+z_2.$$

Na osnovu (1) i (2) dobijamo

(3)
$$w_1=(a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2+(a_{13}+b_{13})x_3,$$
$$w_2=(a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2+(a_{23}+b_{23})x_3.$$

Transformacijama (1), (2), (3) redom odgovaraju matrice:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{Vmatrix}.$$

Ova činjenica sugerira da damo sledeću definiciju:

Definicija 1. *Zbir matrica* $A=\|a_{ik}\|_{m,n}$ *i* $B=\|b_{ik}\|_{m,n}$, *u oznaci* $A+B$, *je matrica*

$$C=\|c_{ik}\|_{m,n}=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & & a_{mn}+b_{mn}\end{Vmatrix},$$

ili kraće

$$\|a_{ik}\|_{m,n}+\|b_{ik}\|_{m,n}=\|a_{ik}+b_{ik}\|_{m,n}.$$

Polazeći od definicje 1, može se odrediti zbir konačnog broja matrica tipa $m\times n$.

Stav 1. *Sabiranje matrica ima osobine*

$$A+B=B+A \qquad \textit{(komutativnost)},$$
$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \textit{(asocijativnost)},$$

gde su A, B, C, matrice istog tipa.

1.4. MNOŽENJE MATRICE BROJEM

Pođimo od transformacije (1) iz 1.3 i obrazujmo novu transformaciju pomoću formula

$$z_1=\alpha y_1,\quad z_2=\alpha y_2\qquad (\alpha\in\mathbf{C}),$$

tj.

(1)
$$z_1=\alpha a_{11}x_1+\alpha a_{12}x_2+\alpha a_{13}x_3,$$
$$z_2=\alpha a_{21}x_1+\alpha a_{22}x_2+\alpha a_{23}x_3.$$

Matrice transformacije (1) iz 1.3 i transformacije (1) iz ovog paragrafa su redom:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23}\end{Vmatrix},$$

te to sugerira sledeću definiciju množenja matrice brojem:

Definicija 1. *Proizvod matrice*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{Vmatrix}$$

i broja α *definiše se sa*

$$\alpha\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & & \alpha a_{mn}\end{Vmatrix},$$

ili kraće

$$\alpha\|a_{ik}\|_{m,n}=\|\alpha a_{ik}\|_{m,n}.$$

Stav 1. *Operacija množenja matrice brojem ima osobine*

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A),$$
$$1\cdot A=A,$$

gde su $\alpha,\ \beta\in\mathbf{C}$ *i A, B matrice istog tipa.*

Ove jednakosti bez teškoće se dokazuju.

Iz stava 1 sleduje da matrice istog tipa čine vektorski prostor.

1.5. NULA-MATRICA

Definicija 1. *Matrica čiji su svi elementi nule zove se nula-matrica i označava O.*

Nula-matrica O tipa $m \times n$ je jedina matrica koja za svaku matricu A tipa $m \times n$ ima osobinu

$$A + O = A.$$

Dakle, nula-matrica je neutralni element za sabiranje matrica.

Svakoj matrici $A = \| a_{ij} \|$ tipa $m \times n$ odgovara jedinstvena suprotna matrica $-A = \| -a_{ij} \|$ tipa $m \times n$ koja ima osobinu

$$A + (-A) = O.$$

Lako se proverava da je $-A = (-1) \cdot A$.

U stvari $-A$ je inverzni element elementa A za operaciju sabiranja matrica.

Zbir $A + (-B)$ označava se i sa $A - B$ i naziva razlika matrica A i B.

U slučaju kada želimo istaći tip nula-matrice koristimo oznake: $O_{m,n}$ za nula-matricu tipa $m \times n$ i O_n za nula-matricu tipa $n \times n$.

1.6. LINEARNA HOMOGENA KOMBINACIJA MATRICA

Polazeći od definicija sabiranja matrica (def. 1 u 1.3) i množenja matrica brojem (def. 1 u 1.4), linearna homogena kombinacija (ili kompozicija matrica $A_1, \ldots, A_r$ istog tipa $m \times n$ je zbir

$$k_1 A_1 + \cdots + k_r A_r, \text{ tj. } \sum_{i=1}^{r} k_i A_i,$$

gde su $k_1, \ldots, k_r \in \mathbf{C}$.

Ovaj zbir može se predstaviti kao jedna jedina matrica tipa $m \times n$.

PRIMER 1.

$$2 \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{Vmatrix} + 5 \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & \frac{1}{5} \end{Vmatrix} - 3 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 17 \\ 27 & -7 \end{Vmatrix}.$$

1.7. TROUGAONA, DIJAGONALNA, SKALARNA I JEDINIČNA MATRICA

Definicija 1. *Kvadratne matrice oblika*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

zovu se trougaone matrice.

(O označava da su svi elementi iznad odnosno ispod glavne dijagonale jednaki nuli). Prva od njih zove se *donja* trougaona matrica, a druga — *gornja*.

Ove matrice zapisuju se i u obliku:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \text{ ili } \| a_{ik} \|_1^n \qquad (a_{ik} = 0, \quad i < k),$$

odnosno

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{Vmatrix}, \text{ ili } \| a_{ik} \|_1^n \qquad (a_{ik} = 0, \quad i > k).$$

Definicija 2. *Kvadratna matrica, čiji su svi elementi van glavne dijagonale nule, zove se dijagonalna matrica*[1].

Ona se zapisuje u obliku

$$\begin{Vmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{Vmatrix} \text{ ili } \begin{Vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{Vmatrix}$$

ili diag $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, ili kraće $\| d_i \delta_{ik} \|_1^n$, gde je δ_{ik} KRONECKEROVA delta (ili KRONECKEROVA delta funkcija) definisana sa

$$\delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \delta_{ik} = 1 \quad (i = k).$$

Definicija 3. *Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali međusobno jednaki, tj. matrica* diag $(d, d, \ldots, d)$, *naziva se skalarna matrica.*

Definicija 4. *Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, tj. matrica* diag $(1, 1, \ldots, 1)$ *naziva se jedinična matrica (ili identična matrica) i obeležava se I.*

U slučaju kada želimo istaći red jedinične matrice označavaćemo jediničnu matricu reda n sa I_n.

Često se u literaturi jedinična matrica obeležava sa E.

Definicija 5. *Trodijagonalne matrice su matrice $\| a_{ik} \|_1^n$ gde je*

$$a_{ik} = \alpha_i \ (i = k), \quad a_{ik} = \beta_i \ (i = k - 1), \quad a_{ik} = \gamma_i \ (i = k + 1),$$
$$a_{ik} = 0 \ (i \neq k, \ k - 1, \ k + 1).$$

PRIMER 1. Matrica

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{Vmatrix}, \text{ tj. } \begin{Vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 3 & \\ & & -2 & 4 & -1 \\ & & & 2 & 5 \end{Vmatrix}$$

je trodijagonalna.

---

[1] Ponekad se u literaturi pojam dijagonalne matrice proširuje i na slučaj pravougaonih matrica. Tada se pod dijagonalnom matricom podrazumeva svaka matrica za koju je

$$a_{ij} \neq 0 \ (i = j), \quad a_{ij} = 0 \ (i \neq j).$$

1.8. MNOŽENJE MATRICA

Neka su date linearne transformacije:

(1)
$$y_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3,$$
$$y_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3;$$

i

(2)
$$z_1 = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + b_{14} x_4,$$
$$z_2 = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 + b_{24} x_4,$$
$$z_3 = b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 + b_{34} x_4.$$

Ako iz (1) i (2) eliminišemo z_1, z_2, z_3, dobijamo

$$\begin{aligned} y_1 = {} & a_{11}(b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + b_{14} x_4) \\ & + a_{12}(b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 + b_{24} x_4) \\ & + a_{13}(b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 + b_{34} x_4), \\ y_2 = {} & a_{21}(b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + b_{14} x_4) \\ & + a_{22}(b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 + b_{24} x_4) \\ & + a_{23}(b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 + b_{34} x_4), \end{aligned}$$

tj.

(3)
$$\begin{aligned} y_1 = {} & (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}) x_1 + (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}) x_2 \\ & + (a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33}) x_3 + (a_{11} b_{14} + a_{12} b_{24} + a_{13} b_{34}) x_4, \\ y_2 = {} & (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31}) x_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}) x_2 \\ & + (a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}) x_3 + (a_{21} b_{14} + a_{22} b_{24} + a_{23} b_{34}) x_4. \end{aligned}$$

Transformacija (3) naziva se proizvod transformacija (1) i (2).

Matrice transformacija (1), (2), (3) su redom

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33} & a_{11} b_{14} + a_{12} b_{24} + a_{13} b_{34} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} & a_{21} b_{14} + a_{22} b_{24} + a_{23} b_{34} \end{matrix} \right\|.$$

Definicija 1. *Proizvod matrica* $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$ *i* $B = \| b_{jk} \|_{n,p}$, *u oznaci* $A \cdot B$ *ili* AB, *je matrica*

$$C = \| c_{ik} \|_{m,p} = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right\|_{m,p}.$$

Prema tome, element c_{ik} obrazuje se na taj način što se elementi i-te vrste matrice A:

$$\| a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \|$$

pomnože sa odgovarajućim elementima k-te kolone matrice B:

$$\left\| \begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix} \right\|$$

i dobijeni proizvodi saberu. Pri tome su odgovarajući elementi a_{i1} i $b_{1k}, \dots, a_{in}$ i b_{nk}.

Proizvod dve matrice ne poseduje osobinu komutacije, što se vidi iz primera

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Definicija 2. *Ako je* $AB = BA$, *matrice* A *i* B *zovu se komutativne.*

PRIMEDBA 1. Neka su matrice A i B reda $m \times n$ i $r \times s$ respektivno. Iz definicije proizvoda matrica sleduje da proizvodi AB i BA postoje ako i samo ako je $m = s$ i $n = r$.

Na primer, matrice $\left\| \begin{matrix} 1, & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right\|$, $\left\| \begin{matrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{matrix} \right\|$ su komutativne jer je

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{matrix} \right\|.$$

Isti je slučaj s matricama

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} -6 & -6 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Stav 1. *Množenje matrica ima osobine:*

(4) $(AB)C = A(BC)$ (*asocijativnost*),

(5) $(A+B)C = AC + BC$ (*distributivnost zdesna*),

(6) $A(B+C) = AB + AC$ (*distributivnost sleva*).

Dokaz. Ovde ćemo najpre dati dokaz da je množenje matrica asocijativno.

Jednakost (4) treba ovako shvatiti: Ako postoje matrice AB i $(AB)C$, tada jednakost (4) uvek važi.

Proizvodi AB i $(AB)C$ postoje za matrice:

$$A = \| a_{ij} \|_{m,n}, \qquad B = \| b_{jk} \|_{n,p}, \qquad C = \| c_{kl} \|_{p,q}.$$

Element na mestu (i, k) matrice AB je

$$f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Element na mestu (i, l) matrice $(AB)C$ je

$$\sum_{k=1}^{p} f_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Element na mestu (j, l) matrice BC je

$$g_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}.$$

Element na mestu (i, l) matrice $A(BC)$ je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Jednakost (4) je tačna jer je

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Prema tome, matrično množenje je asocijativno i umesto $(AB)C$ i $A(BC)$ može se pisati ABC. Sada ćemo dati dokaz jednakosti (5). Neka je

$$A = \| a_{ij} \|_{m,n}, \qquad B = \| b_{ij} \|_{m,n}, \qquad C = \| c_{jk} \|_{n,p}.$$

Element na mestu (i, k) matrice $(A+B)C$ je

(7) $$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk}.$$

Element na mestu (i, k) matrice AC je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$. Element na mestu (i, k) matrice BC je $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk}$. Prema tome, element na mestu (i, k) matrice $AC + BC$ je

(8) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk}.$$

Iz jednakosti izraza (7) i (8) dobijamo (5).

Slično se dokazuje (6).

Stav 2. *Ako je $A = \| a_{ij} \|$ matrica tipa $m \times n$, tada je*

(9) $$I_m \cdot A = A, \quad A \cdot I_n = A.$$

Dokaz. Stavimo $I_m \cdot A = B = \| b_{ij} \|$. Kako je $I_m = \| \delta_{ij} \|_1^m$, na osnovu definicije matričnog množenja dobijamo

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj}.$$

Kako je $\delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k)$, $\delta_{ik} = 1 \quad (i = k)$, izlazi $b_{ij} = a_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, n)$, te je $B = A$, tj. $I_m \cdot A = A$.

Slično se dokazuje jednakost $A \cdot I_n = A$.

Osobine (9) opravdavaju naziv jedinične matrice koji smo ranije dali matricama I_m i I_n. Ove su matrice neutralni (jedinični) elementi za operaciju matričnog množenja.

Iz definicije množenja matrice brojem i definicije množenja matrica sleduje:

Stav 3. *Važe jednakosti*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

gde je $\alpha \in \mathbf{C}$ i A i B matrice takve da postoji proizvod AB.

1.9. OPŠTI POJAM MATRICA

Matricu smo uveli povezujući je sa linearnim transformacijama. Međutim, nezavisno od linearnih transformacija, daje se sledeća definicija matrice:

Definicija 1. *Matrice su dvodimenzionalne sheme brojeva oblika*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

za koje važe definicije 1 *u* 1.2, 1 *u* 1.3, 1 *u* 1.4 *i* 1 *u* 1.8.

Formalnija definicija matrice je sledeća:

Definicija 2. *Matrica A je funkcija definisana na skupu uređenih parova celih brojeva (i, j) $(1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n)$ koja uzima vrednosti iz nekog skupa F pri čemu je a_{ij} vrednost funkcije A koja odgovara paru (i, j).*

Pri ovakvoj definiciji shema (1) predstavlja pogodan način predstavljanja skupa vrednosti funkcije A. Ako se pođe od definicije 2, sabiranje matrica, množenje matrica skalarom i množenje matrica uvode se definicijama 1 u 1.3, 1 u 1.4 i 1 u 1.8.

1.10. NEKE OSOBINE MATRICA

Ako su A, B, C skalari, tada važe stavovi:

1° $AB = BA$;

2° $AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \vee B = 0)$;

3° $AB = AC (A \neq 0) \Rightarrow B = C$.

Međutim, ako su A, B, C matrice, analogni stavovi u opštem slučaju ne važe.

Da množenje matrica ne uživa osobinu komutacije, bilo je reči u 1.8.

Da proizvod dve matrice A i B može biti nula-matrica, a da ni A ni B nisu nula-matrice, vidi se iz primera:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Da stav 3° ne važi za matrice, zaključuje se na sledećem primeru. Za matrice.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

dobijamo

$$AB = AC = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{Vmatrix}.$$

Dakle iako je ovde $AB = AC$ i $A \neq O$, ipak nije $B = C$.

O tome kada implikacije 2° i 3° važe za matrice, reći ćemo nešto više u 3.1.

1.11. TRANSPONOVANA MATRICA

Definicija 1. *Transponovana matrica matrice*

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

je matrica

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

(i-ta vrsta u A je i-ta kolona u A^{T}).

Transponovana matrica matrice A označava se takođe A' ili A^{τ}.

PRIMER 1.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{Vmatrix}.$$

Stav 1. *Operacija transponovanja ima osobine:*

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A, \quad (A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}, \quad (\alpha A)^{\mathrm{T}}=\alpha A^{\mathrm{T}} \quad (\alpha\in\mathbf{C}),$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, \quad (A_1A_2\cdots A_k)^{\mathrm{T}}=A_k^{\mathrm{T}}\cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}.$$

Dokaz. Navešćemo samo dokaz formule $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

Ovu formulu treba ovako shvatiti: Ako postoji proizvod AB, tada postoji i proizvod $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, i važi jednakost

(1) $\quad (AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

Proizvod AB postoji ako su matrice A i B tipa:

$$A=\|a_{ij}\|_{m,n}, \quad B=\|b_{jk}\|_{n,p}.$$

Matrice A^{T} i B^{T} su tipa $n\times m$ odnosno $p\times n$. Proizvod $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ je tipa $p\times m$. AB je tipa $m\times p$, dok je $(AB)^{\mathrm{T}}$ tipa $p\times m$.

Prema tome, matrice $(AB)^{\mathrm{T}}$ i $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ su istog tipa.

Na mestu (k, i) matrice $(AB)^{\mathrm{T}}$ nalazi se element $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

k-ta vrsta matrice B^{T} je:

$$\|b_{1k}\ \ldots\ b_{nk}\|.$$

i-ta kolona matrice A^{T} je:

$$\begin{Vmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{Vmatrix}.$$

Na mestu (k, i) matrice $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ nalazi se element

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Ovim smo dokazali jednakost (1).

1.12. POTENCIJA KVADRATNE MATRICE I MATRIČNI POLINOM

Potenciju kvadratne matrice $A=\|a_{ij}\|_1^n$ definisaćemo induktivno.

Definicija 1. *Potencija kvadratne matrice A definisana je pomoću*

$$A^p=\begin{cases} I & (p=0), \\ A & (p=1), \\ A\cdot A^{p-1} & (p=2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Stav 1. *Ako su p i q nenegativni celi brojevi, tada je*

(1) $\quad A^p\cdot A^q=A^{p+q}$.

Dokaz. Ako je $p=1$, tada je

$$A^1\cdot A^q=A^{1+q},$$

što je saglasno sa induktivnom definicijom 1 potencije.

Pretpostavimo sada da je (1) tačno za p. Tada imamo

$$\begin{aligned} A^{p+1}\cdot A^q &=(A\cdot A^p)\cdot A^q && \text{(na osnovu definicije 1)} \\ &=A\cdot(A^p\cdot A^q) && \text{(na osnovu asocijativnog zakona)} \\ &=A\cdot A^{p+q} && \text{(na osnovu induktivne pretpostavke)} \\ &=A^{p+q+1} && \text{(na osnovu definicije 1)} \\ &=A^{(p+1)+q}. \end{aligned}$$

Slično se dokazuje:

Stav 2. *Ako su p i q nenegativni celi brojevi i A kvadratna matrica, tada je*

$$(A^p)^q=A^{pq}.$$

Primetimo da ako su A i B komutativne matrice, tada je $A^pB^p=(AB)^p$ ($p>0$; p ceo broj).

Definicija 2. *Pod matričnim polinomom podrazumeva se*

(1) $\quad \alpha_0A^p+\alpha_1A^{p-1}+\cdots+\alpha_{p-1}A+\alpha_pI,$

gde su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\in\mathbf{C}$ i A kvadratna matrica.

Svaki matrični polinom (1) može se svesti na jednu jedinu matricu reda n ako je matrica A reda n.

Skalarnom polinomu po promenljivoj x

$$P(x)=\alpha_0x^p+\alpha_1x^{p-1}+\cdots+\alpha_{p-1}x+\alpha_p \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\in\mathbf{C})$$

pridružuje se matrični polinom po kvadratnoj matrici A

$$P(A)=\alpha_0A^p+\alpha_1A^{p-1}+\cdots+\alpha_{p-1}A+\alpha_pI.$$

Nije teško dokazati da se sa dva matrična polinoma $A\mapsto P(A)$ i $A\mapsto Q(A)$ mogu vršiti operacije sabiranje, oduzimanje i množenje kao sa skalarnim po-

linomima $x \mapsto P(x)$ i $x \mapsto Q(x)$ koji im odgovaraju. Pri tome, matrični polinomi $P(A)$ i $Q(A)$ uvek su komutativni.

Primer 1. Zbir, razlika i proizvod matričnih polinoma P i Q, datih sa

$$P(A)=A^2-A+I, \quad Q(A)=A+I,$$

redom su:

$$P(A)+Q(A)=(A^2-A+I)+(A+I)=A^2+2I,$$

$$P(A)-Q(A)=(A^2-A+I)-(A+I)=A^2-2A,$$

$$P(A)Q(A)=(A^2-A+I)(A+I)=A^3-A^2+A+A^2-A+I=A^3+I.$$

1.13. JEDNA PRIMENA RELACIJA, GRAFOVA I MATRICA[1]

1.13.1. RELACIJA DOMINACIJE

Neka je dat skup $E=\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Kaže se da je jedna binarna relacija na skupu E relacija dominacije ($A_i \gg A_j$, tj. A_i dominira nad A_j) ako

1. Nije tačno $A_i \gg A_i$ ($i=1, \ldots, n$), tj. ni jedan element A_i ne može da dominira nad samim sobom što znači da relacija dominancije nije refleksivna.

2. Za svaki par $A_i, A_j - E (i \neq j)$ važi

ili $A_i \gg A_j$ ili $A_j \gg A_i$,

što znači da ni za jedan par (A_i, A_j) relacija dominancije nema osobinu simetrije.

Relacija $\gg$ nije tranzitivna, tj.

$$\{A_i \gg A_j \wedge A_j \gg A_k\} \quad \text{non} \Rightarrow A_i \gg A_k$$

(tranzitivnost ne važi u opštem slučaju, ali mogu postojati trojke koje su tranzitivne; videti Primer 1).

Prema tome, relacija $\gg$ nije ni refleksivna, ni simetrična, ni tranzitivna.

Relacije dominacije prikazuju se grafovima.

Sl. 1.13.1.1.

Sl. 1.13.1.2.

Ako A_1 dominira nad A_2, označava se strelicom koja je od A_1 naperena prema A_2. Na slici 1.13.1.1 je $A_1 \gg A_2$, $A_2 \gg A_3$ i $A_3 \gg A_1$.

[1] Redigovano prema knjizi:
J. G. Kemeny — J. L. Snell — G. L. Thompson: *Algèbre moderne et activités humaines*, Paris 1960, p. 285.

Mreža na slici 1.13.1.2 kazuje da $A_2 \gg A_1$, $A_3 \gg A_2$, $A_1 \gg A_3$.

Svakom grafu može se pridružiti matrica koja se sastoji samo od elemenata 0 i 1.

Posmatrajmo shemu:

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	1	0
A_2	0	0	1
A_3	1	0	0

Na mestu (1, 1) stavimo 0 da bismo označili da ne postoji dominacija A_1 nad A_1. Isto važi za mesta (2, 2) i (3, 3).

Kako je prema slici 1.13.1.1, $A_1 \gg A_2$ stavlja se 1 na mestu (1, 2). Tada je 0 na mestu (2, 1).

Relaciji $A_2 \gg A_3$ odgovara 1 na mestu (2, 3) i 0 na mestu (3, 2).

Relaciji $A_3 \gg A_1$ odgovara 1 na mestu (3, 1) i 0 na mestu (1, 3).

Grafu sa slike 1.13.1.2 odgovara matrica

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	0	1
A_2	1	0	0
A_3	0	1	0

Zadatak 1. **Kakav graf odgovara matrici**

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	1	1	0
A_2	0	0	1	1
A_3	0	0	0	1
A_4	1	0	0	0

Matrice koje odgovaraju grafovima dominacije zovu se *sociometrijske matrice*. U teoriji grafova ove matrice se nazivaju matrice susedstva.

Definicija 1. *Moć dominacije elementa A_i jednaka je zbiru svih elemenata u i-toj vrsti matrice $S+S^2$.*

Primer 1. Posmatrajmo matricu

$$(1) \qquad S=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

koja odgovara sledećim relacijama dominacije

$A_1 \gg A_2, \quad A_1 \gg A_3, \quad A_1 \gg A_4,$

$A_2 \gg A_3, \quad A_2 \gg A_4,$

$A_3 \gg A_4.$

Primetimo da za trojku (A_1, A_2, A_3) važi osobina tranzitivnosti koja u opštem slučaju ne važi.

Kako je

$$S^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad S+S^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

dobijamo: moć $A_1 = 6$, moć $A_2 = 3$, moć $A_3 = 1$, moć $A_4 = 0$.

Neka matrica (1) znači:

A_1 pobeđuje A_2; A_2 pobeđuje A_3; A_3 pobeđuje A_4;

A_1 pođeđuje A_3; A_2 pobeđuje A_4;

A_1 pobeđuje A_4.

Dakle, moć dominacije A_1 je 6, dok A_2, A_3, A_4 imaju redom moći: 3, 1, 0.

Moć dominacije A_i izračunava se, po drugoj definiciji, kao zbir svih elemenata u i-toj vrsti matrice $S + \frac{1}{2} S^2$.

Moć se može definisati polazeći od matrice $S + S^2 + S^3$, itd.

PRIMEDBA 1. Zbir i proizvod sociometrijskih matrica ne moraju biti sociometrijske matrice, ali, kao što se iz predhodnog vidi, ove matrice mogu imati sociometrijsko tumačenje.

1.13.2. MREŽE KOMUNIKACIJA

Neka je dat skup

$$E = \{A_1, \ldots, A_n\},$$

gde su $A_1, \ldots, A_n$ ljudska bića ili što drugo.

Uvedimo relaciju komunikacija $\gg$ $(A_i \gg A_j$, tj. A_i može da komunicira sa A_j, ali se ne isključuje da i A_j može da komunicira sa $A_i)$ pod uslovom da nije tačno

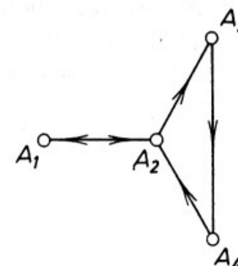
$$A_i \gg A_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

tj. pretpostavlja se da individua ne može da komunicira sama sa sobom ni da ima potrebe da to čini.

Ako $A_i \gg A_j$ i $A_j \gg A_i$, tada je komunikacija bilateralna; ako je $A_i \gg A_j$ i A_j non$\gg A_i$, tada je komunikacija unilateralna i to od A_i ka A_j.

Mreži komunikacija sa slike 1.13.2.1 odgovara matrica C_1.

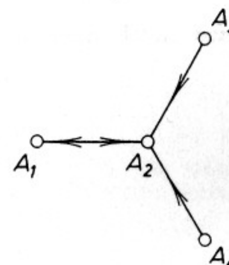
$$C_1 = \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



Sl. 1.13.2.1.

Mreži komunikacija sa slike 1.13.2.2 odgovara matrica C_2.

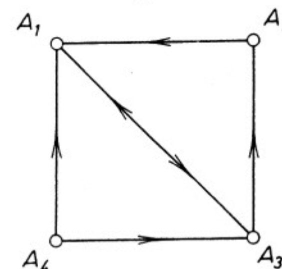
$$C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$



Sl. 1.13.2.2.

Mreži komunikacija sa slike 1.13.2.3 odgovara matrica C_3.

$$C_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$



Sl. 1.13.2.3.

Ako je C matrica koja odgovara jednoj mreži komunikacija, tada element na mestu (i, j) u matrici C^2 daje broj komunikacija sa dva stepena koja postoji između A_i i A_j.

Tako matrici C_1 odgovara

$$C_1^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Zadaci za rešavanje

M I, Matrice i determinante: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28.

2. DETERMINANTE

2.1. POJAM DETERMINANTE

Pretpostavimo da su a_{ik} $(i,\ k=1, \ldots, n)$ kompleksni brojevi.

Definicija 1. *Za matricu prvog reda* $A=\|a_{11}\|$ *broj* a_{11}, *u oznaci* $\det A$, *naziva se determinanta prvog reda matrice* A.

Za matricu drugog reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

broj $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, *u oznaci*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

naziva se determinanta drugog reda matrice A.

Za matricu trećeg reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

broj

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

u oznaci

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

naziva se determinanta trećeg reda matrice A.

Uopšte, kvadratnoj matrici $A=\|a_{ik}\|_1^n$ *pridružuje se broj*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

koji se definiše zbirom

$$\det A=\sum(-1)^k a_{1k_1}\cdots a_{nk_n}.$$

U ovom zbiru $k_1 \dots k_n$ je jedna od permutacija elemenata $1, \dots, n$, a k je broj inverzija permutacije $k_1 \dots k_n$. Sumiranje se proteže na sve permutacije indeksa.

Ovako definisan broj $\det A$ *naziva se determinanta reda n matrice A, ili kraće determinanta reda n.*

Determinanta $\det A$ je u stvari polinom od $n!$ članova od kojih $\frac{1}{2}(n!)$ imaju znak *plus* ako je $n>1$. Stoga se $\sum(-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{nk_n}$ naziva polinom determinante. Svaki član je proizvod od n faktora od kojih je jedan i samo jedan iz svake vrste i svake kolone matrice A.

Može se dokazati da važi jednakost

$$\sum(-1)^k a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = \sum(-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

Navešćemo odakle potiču gornje definicije determinanata matrica drugog i trećeg reda. Radi toga posmatrajmo prvo sistem linearnih jednačina.

(1) $$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = h_1, \qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = h_2.$$

Pomnožimo prvu jednačinu sistema (1) sa a_{22}, drugu sa $-a_{12}$ i saberimo odgovarajuće strane tako obrazovanih jednačina. Tada dobijamo

(2) $$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_1 = h_1 a_{22} - h_2 a_{12}.$$

Ako pak prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa a_{21}, drugu sa $-a_{11}$ i saberemo odgovarajuće strane tako dobijenih jednačina, dobijamo

(3) $$(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) x_2 = h_1 a_{21} - h_2 a_{11}.$$

Ako je $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ iz (2) i (3) dobijamo da je rešenje sistema (1):

(4) $$x_1 = \frac{h_1 a_{22} - h_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{h_2 a_{11} - h_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Koeficijenti uz x_1 i x_2 u sistemu (1) obrazuju matricu

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Kao što vidimo, imenilac u izrazima koji definišu x_1 i x_2 je upravo broj koji smo nazvali determinanta matrice A.

Prema tome, x_1 i x_2 sa novim oznakama određeni su sa

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ove formule dovele su prirodno do definicije determinante drugog reda.

Posmatrajmo sada sistem linearnih jednačina

(5) $$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= h_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= h_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= h_3. \end{aligned}$$

Rešićemo ovaj sistem metodom zamene. Bar jedan od koeficijenata a_{13}, a_{23}, a_{33} mora biti različit od nule, inače bismo imali sistem od tri jednačine sa dve nepoznate. Neka je to, na primer, a_{33} (ako je $a_{33}=0$ promenom mesta jednačinama i prenumerisivanjem koeficijenata, uvek možemo postići da koeficijent uz x_3 u trećoj jednačini bude različit od nule).

Pod ovom pretpostavkom je

(6) $$x_3 = \frac{h_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2}{a_{33}}.$$

Zamenom (6) u prve dve jednačine sistema (5), posle sređivanja, dobijamo

$$\begin{aligned} (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) x_1 + (a_{12} a_{33} - a_{23} a_{32}) x_2 &= h_1 a_{33} - h_3 a_{13}, \\ (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) x_1 + (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) x_2 &= h_2 a_{33} - h_3 a_{23}. \end{aligned}$$

Ovo je, u stvari, sistem (1) u kome treba zameniti a_{11} sa $a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}$, a_{12} sa $a_{12} a_{33} - a_{23} a_{32}$, a_{21} sa $a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}$, a_{22} sa $a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$, h_1 sa $h_1 a_{33} - h_3 a_{13}$, h_2 sa $h_2 a_{33} - h_3 a_{23}$.

Primenom prve od formula (4), dobijamo

$$x_1 = \frac{a_{22} a_{33} h_1 + a_{12} a_{23} h_3 + a_{13} a_{32} h_2 - a_{23} a_{32} h_1 - a_{12} a_{33} h_2 - a_{22} a_{13} h_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}},$$

uz pretpostavku da je imenilac ovoga razlomka različit od nule.

Koeficijenti uz x_1, x_2, x_3 obrazuju matricu

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Kao što vidimo, imenilac u izrazu koji određuje x_1 je upravo broj koji smo nazvali determinanta matrice A. Izraz u brojiocu je

$$\det \begin{Vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Prema tome, nepoznata x_1 određena je sa

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Iz druge od formula (4) i iz (6) za x_2 i x_3 dobijamo slične izraze:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Ove formule za x_1, x_2, x_3 dovele su prirodno do definicije determinante trećeg reda.

2.2. OSOBINE DETERMINANATA

2.2.1. DETERMINANTE DRUGOG REDA

Za determinantu kvadratne matrice drugog reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}$$

važe sledeći stavovi, koji se direktnim računom mogu proveriti.

Stav 1. $\det A=\det A^{T}$, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Stav 2. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki sa elementima druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A=0$, *tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}\\ a_{21} & a_{21}\end{vmatrix}=0.$$

Stav 3. *Determinanta* $\det A$ *množi se jednim brojem λ ako se svaki element jedne i samo jedne vrste (odnosno kolone) matrice A pomnoži tim brojem, tj.*

$$\lambda\det A=\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12}\\ \lambda a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & \lambda a_{22}\end{vmatrix}.$$

Stav 4. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) proporcionalni elementima druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A=0$, *tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12}\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11}\\ a_{21} & \lambda a_{21}\end{vmatrix}=0.$$

Stav 5. *Neka su u matrici A elementi jedne kolone oblika $a_{ij}=a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}$. Ako su $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$ matrice koje se dobijaju kada se u matrici A elementi i-te kolone redom zamene sa $a_{ij}^{(1)}$ i $a_{ij}^{(2)}$, tada važi jednakost*

$$\det A=\det A^{(1)}+\det A^{(2)}.$$

PRIMER 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)} & a_{12}\\ a_{21}^{(1)}+a_{21}^{(2)} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}\\ a_{21}^{(1)} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}\\ a_{21}^{(2)} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}^{(1)}+a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(1)}+a_{22}^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)}\end{vmatrix}.$$

Stav 6. *Determinanta ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste (odnosno kolone) njene matrice dodaju elementi druge vrste (odnosno kolone) pošto se prethodno pomnože istim brojem, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12}\\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{11}\\ a_{21} & a_{22}+\lambda a_{21}\end{vmatrix}.$$

Stav 7. *Ako se u matrici A determinante* $\det A$ *među sobom promene dve vrste (dve kolone), determinanta menja znak, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}\\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix}.$$

Stav 8. *Ako je*

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix},$$

tada je

$$\det(AB)=(\det A)(\det B),$$

tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}.$$

Međutim, kako važe jednakosti $\det B=\det B^{T}$ i $\det A=\det A^{T}$, determinante drugog reda možemo množiti i na sledeće načine:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}\\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}\\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}.$$

2.2.2. DETERMINANTE TREĆEG REDA

Za determinantu kvadratne matrice trećeg reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix}$$

važe stavovi analogni stavovima $1-8$ iz 2.2.1 za determinante drugog reda. Ovi stavovi mogu se proveriti direktnim izračunavanjem determinanata.

Stav 1. $\det A=\det A^{T}$, *tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Stav 2. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki sa elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A=0$, *tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & a_{31}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{32}\end{vmatrix}=0.$$

Stav 3. *Determinanta* $\det A$ *množi se brojem* λ *ako se svaki element jedne i samo jedne vrste (odnosno kolone) matrice* A *pomnoži tim brojem, tj.*

$$\lambda\cdot\det A=\begin{vmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\lambda a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\lambda a_{31}&\lambda a_{32}&\lambda a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda a_{11}&a_{12}&a_{13}\\\lambda a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\lambda a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\lambda a_{12}&a_{13}\\a_{21}&\lambda a_{22}&a_{23}\\a_{31}&\lambda a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\lambda a_{13}\\a_{21}&a_{22}&\lambda a_{23}\\a_{31}&a_{32}&\lambda a_{33}\end{vmatrix}.$$

Stav 4. *Ako su u matrici* A *elementi jedne vrste (odnosno kolone) proporcionalni elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A=0$, *tj.*

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\lambda a_{23}\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\lambda a_{11}&a_{13}\\a_{21}&\lambda a_{21}&a_{23}\\a_{31}&\lambda a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\lambda a_{11}\\a_{21}&a_{22}&\lambda a_{21}\\a_{31}&a_{32}&\lambda a_{31}\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\lambda a_{12}\\a_{21}&a_{22}&\lambda a_{22}\\a_{31}&a_{32}&\lambda a_{32}\end{vmatrix}=0.$$

Stav 5. *Neka su u matrici* A *elementi* i*-te kolone* (i *fiksno*; $1\leq i\leq 3$) *oblika*

$$a_{ij}=a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}\qquad(1\leq j\leq 3).$$

Ako su $A^{(1)}$ *(odnosno* $A^{(2)}$*) matrice koje se dobijaju kada se u matrici* A *elementi* i*-te kolone* a_{ij} *zamene sa* $a_{ij}^{(1)}$ *(odnosno sa* $a_{ij}^{(2)}$*), važi jednakost*

$$\det A=\det A^{(1)}+\det A^{(2)}.$$

Analogni stav važi i ako su elementi neke vrste dati u obliku zbira.

PRIMER 1.

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_1&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+b_2&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_1&a_{12}+b_2&a_{13}+b_3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Stav 6. *Determinanta ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste (odnosno kolone) njene matrice dodaju elementi druge vrste (odnosno kolone), pošto se prethodno pomnože istim brojem.*

PRIMER 2.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+\lambda a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+\lambda a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+\lambda a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

PRIMER 3.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+\lambda a_{21}&a_{32}+\lambda a_{22}&a_{33}+\lambda a_{23}\end{vmatrix}.$$

PRIMER 4.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}+\lambda a_{11}+\mu a_{12}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}+\lambda a_{21}+\mu a_{22}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+\lambda a_{31}+\mu a_{32}\end{vmatrix}.$$

Stav 7. *Ako se u matrici* A *determinante* $\det A$ *međusobom promene dve vrste (dve kolone), determinanta menja znak, tj.*

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Stav 8. $\det(AB)=(\det A)(\det B)$, *tj.*

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}&a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}&a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}&a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}&a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{vmatrix}.$$

Kako je $\det B=\det B^{\mathrm{T}}$, determinante možemo takođe množiti vrsta puta vrsta, kolona puta kolona ili kolona puta vrsta. Tako je, na primer,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}&a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}&a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}&a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}&a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13}&a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}&a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{31}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{32}&a_{11}b_{13}+a_{21}b_{23}+a_{31}b_{33}\\a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{32}b_{31}&a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{32}&a_{12}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{32}b_{33}\\a_{13}b_{11}+a_{23}b_{21}+a_{33}b_{31}&a_{13}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{32}&a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{vmatrix}.$$

2.2.3. DETERMINANTE PROIZVOLJNOG REDA

Uočimo dve kvadratne matrice reda n

$$A=\|a_{ik}\|,\quad B=\|b_{ik}\|\quad(i,\ k=1,\ldots,n).$$

Za determinante reda n važe stavovi analogni stavovima za determinante drugog i trećeg reda.

Stav 1. $\det A=\det A^{\mathrm{T}}$.

Dokaz. Uočimo proizvoljan član polinoma determinante $\det A$:

(1) $a_{1k_1} \cdots a_{nk_n}$

Svaki od elemenata $a_{1k_1}, \ldots, a_{nk_n}$ nalazi se tačno jednom u svakoj vrsti i svakoj koloni matrice A^T. Prema tome, (1) će biti istovremeno član polinoma determinante $\det A^T$. U polinomu determinante $\det A$ član (1) se pojavljuje sa znakom $(-1)^k$, gde je k broj inverzija permutacije $k_1, \ldots, k_n$. Međutim, sa tim istim predznakom, član (1) se pojavljuje i u polinomu determinante $\det A^T$.

Ovim je stav 1 dokazan.

Stav 2. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Neka su u matrici A jednaki i-ta vrsta i j-ta vrsta, tj. neka je $a_{i1} = a_{j1}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$. Uočimo proizvoljan član polinoma determinante $\det A$:

(2) $(-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n}$,

gde je k broj inverzija u permutaciji $k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n$. Polinom determinante $\det A$ sadrži takođe i član

(3) $(-1)^{k'} a_{1k_1} \cdots a_{ik_j} \cdots a_{jk_i} \cdots a_{nk_k}$,

gde je k' broj inverzija u permutaciji $k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n$.

Kako je $a_{ik_i} = a_{jk_i}$ i $a_{jk_j} = a_{ik_j}$, izrazi (2) i (3) su jednaki po apsolutnoj vrednosti. Budući da se permutacija $k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n$ dobija iz permutacije $k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n$ transpozicijom elemenata k_i i k_j, ove dve permutacije su različite parnosti (videti Uvod, 5.7.), pa su izrazi (2) i (3) suprotnog znaka. Prema tome, članovi (2) i (3) polinoma determinante $\det A$ međusobno se potiru. Ovo se dešava sa svim članovima polinoma determinante $\det A$, čime je za slučaj jednakosti dveju vrsta stav 2 dokazan. Da stav važi i ako su jednake dve kolone sleduje iz stava 1.

Stav 3. *Determinanta se množi brojem ako se svaki element jedne i samo jedne vrste (odnosno kolone) njene matrice pomnoži tim brojem.*

Dokaz. Treba dokazati da važi jednakost $\lambda \det A = \det B$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, gde je

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{j1} & & \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Kako je

$$\det B = \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots (\lambda a_{jk_j}) \cdots a_{nk_n},$$

gde je k broj inverzija u permutaciji $k_1 \ldots k_j \ldots k_n$, imamo

$$\det B = \lambda \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n} = \lambda \det A.$$

Ovim je dokazano da se determinanta množi brojem ako se svaki element jedne i samo jedne vrste njene matrice pomnoži tim brojem. Na osnovu stava 1 zaključujemo da stav važi i ako se elementi jedne i samo jedne kolone pomnože tim brojem.

Stav 4. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) proporcionalni elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Ovo je neposredna posledica stavova 2 i 3.

Stav 5. *Neka su u matrici A elementi i-te vrste (i fiksno; $1 \leq i \leq n$) oblika*

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Ako su $A^{(1)}$ (odnosno $A^{(2)}$) matrice koje se dobijaju kada se u matrici A elementi i-te vrste a_{ij} zamene sa $a_{ij}^{(1)}$ (odnosno sa $a_{ij}^{(2)}$), važi jednakost

$$\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}.$$

Dokaz. Pođimo od matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}^{(1)} + a_{i1}^{(2)} & & a_{in}^{(1)} + a_{in}^{(2)} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Kako je

$$\det A = \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} \qquad (a_{ik_i} = a_{ik_i}^{(1)} + a_{ik_i}^{(2)}),$$

gde je k broj inverzija u permutaciji $k_1 \ldots k_i \ldots k_n$, imamo

$$\det A = \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots (a_{ik_i}^{(1)} + a_{ik_i}^{(2)}) \cdots a_{nk_n}$$
$$= \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{ik_i}^{(1)} \cdots a_{nk_n}$$
$$+ \sum (-1)^k a_{1k_1} \cdots a_{ik_i}^{(2)} \cdots a_{nk_n},$$

tj. važi jednakost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}^{(1)} + a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(1)} + a_{i2}^{(2)} & a_{in}^{(1)} + a_{in}^{(2)} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & & a_{in}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(2)} & & a_{in}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogno se dokazuje da važi i jednakost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}^{(1)} + a_{1i}^{(2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i}^{(1)} + a_{2i}^{(2)} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni}^{(1)} + a_{ni}^{(2)} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i}^{(1)} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni}^{(1)} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}^{(2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & & a_{2i}^{(2)} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni}^{(2)} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Stav 6. *Determinanta ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste (odnosno kolone) njene matrice dodaju elementi druge vrste (odnosno kolone), pošto se prethodno pomnože istim brojem.*

Dokaz. Ovaj stav je posledica stavova 3, 4 i 5.

Prema tome, ako je $i, j = 1, \ldots, n$, važe jednakosti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni}+\lambda a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Stav 7. *Ako u matrici A među sobom promene mesta dve vrste (dve kolone), determinanta* det A *menja znak.*

Dokaz. Neka je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako i-toj koloni dodamo j-tu kolonu, determinanta, na osnovu stava 6, ne menja vrednost, pa imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni}+a_{nj} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Na osnovu istog stava, determinanta neće promeniti vrednost i ako j-toj koloni dodamo novo dobijenu i-tu kolonu prethodno pomnoženu sa -1. Prema tome imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni}+a_{nj} & & -a_{ni} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dodajući najzad, i-toj koloni j-tu kolonu, nalazimo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & & -a_{ni} & & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{ni} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

gde smo iskoristili rezultat iz stava 3.

Na sličan način se dokazuje stav i za slučaj kada dve vrste međusobno promene mesta.

Stav 8. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Dokaz. Neka je

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Treba dokazati da je $(\det A)(\det B) = \det C$, gde je

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{Vmatrix},$$

i $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$.

Pođimo od

$$\det C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kako su elementi prve vrste zbirovi od po n sabiraka, $\det C$ može se predstaviti kao zbir od n determinanata. Svaka od tih determinanata u drugoj vrsti ima članove koji su zbirovi od po n sabiraka, pa se svaka takva determinanta može predstaviti kao zbir od n determinanata. Prema tome, $\det C$ može se predstaviti kao zbir od n^2 determinanata. Produžujući ovo rezonovanje zaključujemo da se $\det C$ može predstaviti kao zbir od n^n determinanata oblika

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1i_1} b_{i_1 1} & \cdots & a_{1i_1} b_{i_1 n} \\ \vdots & & \\ a_{ni_n} b_{i_n 1} & & a_{ni_n} b_{i_n n} \end{vmatrix} = a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 n} \\ \vdots & & \\ b_{i_n 1} & & b_{i_n n} \end{vmatrix}.$$

Od n^n determinanata D_k mogu biti različiti od nule samo one kod kojih je $i_1 \ldots i_n$ jedna permutacija brojeva $1, \ldots, n$, jer ako među brojevima $i_1, \ldots, i_n$ ima međusobno jednakih, na osnovu stava 2 imamo

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 n} \\ \vdots & & \\ b_{i_n 1} & & b_{i_n n} \end{vmatrix} = 0,$$

pa je i $D_k = 0$.

Ako u determinanti B_1 izvršimo razmene vrsta tako da u m-toj vrsti elementi umesto indeksa i_m imaju indeks m, dobićemo

$$D_k = (-1)^t a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{vmatrix},$$

jer smo izvršili t transpozicija.

Prema tome,

$$\det C = \Sigma D_k = \Sigma (-1)^t a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{vmatrix} = (\det A)(\det B),$$

čime je stav 8 dokazan.

Zbog osobine $\det B = \det B^{\mathrm{T}}$ determinante ne moramo množiti vrsta puta kolona, kao pri množenju matrica, već možemo množiti vrsta puta vrsta, kolona puta kolona ili kolona puta vrsta. U zavisnosti od toga na koji od ovih načina množimo determinante, imamo

$$|c_{ik}|_1^n = \det(AB) = (\det A)(\det B),$$

pri čemu je

1° ako množimo vrsta puta kolona: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$;

2° ako množimo vrsta puta vrsta: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{kj}$;

3° ako množimo kolona puta kolona: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{jk}$;

4° ako množimo kolona puta vrsta: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{kj}$.

2.3. IZRAČUNAVANJE VREDNOSTI DETERMINANATA

1° Za izračunavanje vrednosti determinanata (tj. za razvijanje determinanata) drugog, trećeg i četvrtog reda korisne su sledeće sheme:

$$\begin{matrix} + \\ \searrow \end{matrix}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ - \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ - & - & - & & \end{array}$$

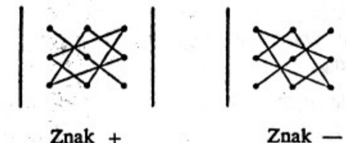
$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \\ + & - & + & - & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & & \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \\ + & - & + & - & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & & \\ a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{42} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \\ + & - & + & - & & & \end{array}$$

Upotreba ovih shema je očigledna.

Češće se vrednost determinante trećeg reda izračunava kao algebarski zbir proizvoda od po tri elementa uzeta po sledećoj shemi:



Znak + Znak —

Sa znakom + uzimaju se elementi koji leže na dijagonali $a_{11}a_{22}a_{33}$ i u temenima dva trougla koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali (videti sliku). Sa znakom — uzimaju se elementi koji leže na dijagonali $a_{31}a_{22}a_{13}$ i u temenima dva trougla (videti sliku) koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali. Ovom shemom izraženo je SARRUSOVO pravilo.

2° Pri izračunavanju vrednosti determinante trećeg reda D možemo ovako postupiti. Pođimo od njenog razvoja

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Polinom determinante može se predstaviti u obliku:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

tj.

(1) $$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Determinante drugog reda

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

zovu se *subdeterminante* (*minori*) elemenata a_{11}, a_{12}, a_{13} date determinante.

Kada determinantu D predstavimo u obliku (1), kažemo da smo je *razvili po elementima prve vrste.*

Determinantu D možemo predstaviti i u sledećim oblicima:

$$\begin{aligned} D &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dokazali smo, dakle, da se svaka determinanta trećeg reda može razviti po elementima ma koje vrste, odnosno ma koje kolone. Otuda imamo šest razvoja determinante trećeg reda po elementima njenih vrsta odnosno kolona.

Definicija 1. *Determinanta drugog reda koja se dobija ako u determinanti trećeg reda izostavimo elemente i-te vrste i k-te kolone* ($i, k = 1, 2, 3$) *zove se subdeterminanta (minor) elementa* a_{ik}.

Proizvod subdeterminante elementa a_{ik} *sa* $(-1)^{i+k}$ *zove se kofaktor (algebarski komplement) elementa* a_{ik}.

Prema tome, imamo sledeći stav:

Stav 1. *Determinanta D može se predstaviti u obliku*

$$(2) \qquad D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k},$$

gde je A_{ik} *kofaktor elemenata* a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$).

Važan je sledeći stav:

Stav 2. *Za* $i, k = 1, 2, 3$ *važe jednakosti*

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} &= \delta_{ik} D, \\ a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + a_{3i} A_{3k} &= \delta_{ik} D. \end{aligned}$$

Dokaz. Ako je $i = k$ ($i, k = 1, 2, 3$) formule (3) se svode na (2).

Ako je, na primer, $i = 1$, $k = 2$, tada leve strane identiteta (3) postaju

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}, \qquad a_{11} A_{12} + a_{21} A_{22} + a_{31} A_{32}.$$

Prvi od ovih izraza je razvoj determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

po elementima druge vrste, dok je drugi izraz razvoj determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

po elementima druge kolone.

Obe determinante jednake su nuli.

Slično se dokazuje stav i za ostale vrednosti i, k.

3° Izračunavanje vrednosti determinante reda n može se svesti na izračunavanje n determinanata reda $n-1$.

Pođimo od definicione formule determinante:

$$D = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

i u polinomu determinante D grupišimo sve članove koji sadrže kao faktor a_{11}, zatim $a_{12}, \ldots$, i na kraju a_{1n}.

Koeficijent uz a_{11} je

$$\sum (-1)^r a_{2k_2} a_{3k_3} \cdots a_{nk_n}$$

(r označava broj inverzija u permutaciji $k_2 k_3 \ldots k_n$, ako je glavna permutacija $23 \ldots n$), tj.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ovo je determinanta reda $n-1$ koju smo dobili izostavljanjem prve vrste i prve kolone u matrici determinante D. Determinanta D_{11} je minor elementa a_{11} determinante D.

Posmatrajmo sada element a_{1k} ($1 \leq k \leq n$). Da bismo odredili koeficijent uz ovaj element, kolonu $\begin{Vmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{Vmatrix}$ permutujmo redom sa kolonama

$$\begin{Vmatrix} a_{1,k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k-1} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{1,k-2} \\ \vdots \\ a_{n,k-2} \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Vmatrix}.$$

Posle ovih $k-1$ permutovanja kolona, determinanta D postaje

$$(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{nk} & a_{n1} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dakle, kojeficijent uz a_{1k} u razvoju determinante koja stoji uz $(-1)^{k-1}$ je determinanta

$$D_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

tj. minor elementa a_{1k} determinante D.

Prema tome, determinantu D možemo predstaviti u obliku

$$D = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} D_{1k} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} D_{1n}.$$

Na sličan način zaključujemo da razvoj determinante D po elementima i-te vrste ima oblik

$$D = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + \cdots + (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}.$$

Definicija 2. *Kofaktor (ili algebarski komplement) elementa a_{ik} je determinanta*

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}D_{ik},$$

gde je D_{ik} determinanta koja se dobija iz D izostavljanjem i-te vrste i k-te kolone.

Prema tome, imamo sledeći:

Stav 3. *Determinanta D može se predstaviti na sledeće načine:*

$$(4)\qquad D=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\qquad (i=1,\ldots,n),$$
$$D=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\qquad (k=1,\ldots,n),$$

gde je A_{ik} kofaktor elementa a_{ik} $(i,\ k=1,\ldots,n)$.

Dakle, svaku determinantu reda n možemo razviti po elementima ma koje vrste odnosno ma koje kolone, ukupno na $2n$ načina.

Formule (4) izveo je LAPLACE 1772. godine.

Stav 4. *Važe identiteti:*

$$(5)\qquad a_{i1}A_{k1}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\delta_{ik}D,$$

$$(6)\qquad a_{1i}A_{1k}+\cdots+a_{ni}A_{nk}=\delta_{ik}D,$$

gde je A_{pq} kofaktor elementa a_{pq} $(i,\ k,\ p,\ q=1,\ldots,n)$.

Dokaz. Dokazaćemo samo formulu (5). Formula (6) dokazuje se analogno.

Ako je $i=k$, (5) postaje

$$a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=D,$$

a to je prva od formula (4) iz stava 3.

Pretpostavimo sada da je $i\neq k$. Ako razvijemo determinantu D po elementima k-te vrste, dobijamo

$$(7)\qquad a_{k1}A_{k1}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=D.$$

Ako u determinanti D stavimo $a_{kj}=a_{ij}$ $(j=1,\ldots,n)$, imamo $D=0$ (jer su u posmatranoj determinanti dve vrste identične), tako da (7) implicira

$$a_{i1}A_{k1}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\quad (i\neq k).$$

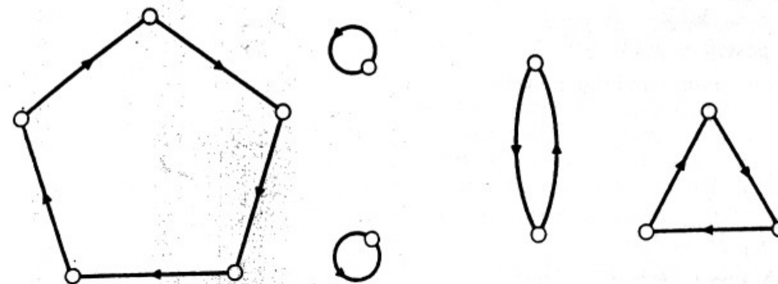
Ovim je dokazan identitet (5).

2.4. IZRAČUNAVANJE VREDNOSTI DETERMINANATA POMOĆU GRAFOVA[1]

Graf G sa m čvorova naziva se orijentisana kontura (ili, kratko, kontura) ako se njegovi čvorovi mogu numerisati brojevima $1,\ 2,\ldots,\ m$ tako da budu ispunjeni sledeći uslovi: 1° Za svako $i=1,\ 2,\ldots,\ m-1$ postoji u G orijentisana grana koja ide iz čvora i u čvor $i+1$; 2° postoji orijentisana grana koja ide iz čvora m u čvor 1; 3° osim navedenih graf ne poseduje druge grane.

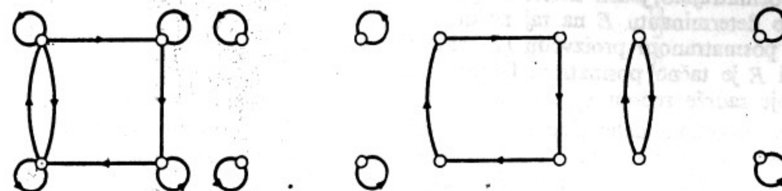
[1] Odeljak 2.4. izradio je D. CVETKOVIĆ.

Graf sa orijentisanim granama (i/ili petljama) naziva se linearan ako iz svakog čvora izlazi i u svaki čvor ulazi tačno jedna grana. Linearni graf se sastoji od jednog ili više odvojenih delova (tzv. komponenata) od kojih svaki predstavlja konturu (sl. 2.4.1). Konturu može da obrazuje i samo jedna petlja.



Sl. 2.4.1.

Ako se iz nekog grafa udalji izvestan broj grana pri čemu broj čvorova u grafu ostaje nepromenjen, dobija se graf koji se naziva delimični graf početnog grafa. Linearni delimični graf grafa G naziva se faktor grafa G. Na sl. 2.4.2 prikazani su svi faktori jednog grafa.



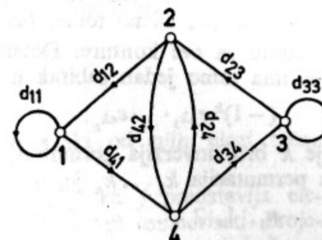
Sl. 2.4.2.

Determinanti $D=\det\|d_{ij}\|_1^n$ može se pridružiti jedan graf na sledeći način. Čvorovi grafa, kojih ima n, obeleženi su brojevima $1,\ 2,\ldots,\ n$. Za svaki par indeksa $i,\ j$ za koji je $d_{ij}\neq 0$ povlači se iz čvora j orijentisana grana koja vodi u čvor i. Ovoj grani se pridružuje broj d_{ij}. Ako je $d_{ij}=0$ pomenuta grana se ne povlači. Ovako dobijeni graf G_D naziva se graf pridružen determinanti D.

Na primer, determinanti

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24}\\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34}\\ d_{41} & d_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

pridružuje se graf G_D sa sl. 2.4.3.



Sl. 2.4.3.

Pokazaćemo kako se na osnovu grafa G_D može odrediti vrednost determinante D.

Kao što je poznato po definiciji je

$$(1)\qquad D=\sum(-1)^J d_{1j_1}\cdots d_{nj_n},$$

gde je j broj inverzija u permutaciji $j_1 \ldots j_n$ a sumiranje se vrši po svim permutacijama $j_1 \ldots j_n$ brojeva $1, \ldots, n$. Posmatrajmo jedan određeni proizvod

(2) $$d_{1j_1} \cdots d_{ij_i} \cdots d_{nj_n}$$

iz sume na desnoj strani relacije (1). Proizvod (2) je različit od 0 ako i samo ako su brojevi d_{ij_i} $(i=1, \ldots, n)$ različiti od 0. Ako je to slučaj, u grafu G_D sigurno postoji n grana (i/ili petlji) koje su označene brojevima d_{ij_i} $(i=1, \ldots, n)$.

Posmatrajmo položaj pomenutih n grana u grafu G_D i pogledajmo šta one obrazuju u tom grafu. Kako u proizvodu (2) učestvuje tačno po jedan element iz svake vrste i tačno po jedan element iz svake kolone determinante D, u grafu G_D u svaki čvor ulazi tačno jedna i iz svakog čvora izlazi tačno jedna grana (ili petlja) od pomenutih n grana. Odatle se zaključuje da te grane obrazuju faktor grafa G_D. Dakle, svakom sabirku iz (1) koji je različit od 0 odgovara u grafu G_D jedan faktor.

Na sličan način se zaključuje da i, obrnuto, svakom faktoru grafa G_D odgovara u razvoju (1) determinante D jedan sabirak koji je različit od 0.

Stoga se vrednost determinante može izračunati pomoću proizvoda brojeva pridruženih granama pojedinih faktora grafa pridruženog determinanti. Proizvod brojeva pridruženih granama faktora nazivaćemo prenos faktora. Ako su faktori grafa označeni sa $F_1, F_2, \ldots$, njihove prenose ćemo obeležavati sa $C(F_1), C(F_2), \ldots$

Ostaje još otvoreno pitanje određivanja veličine $(-1)^j$ iz (1).

Posmatrajmo jedan faktor F grafa G_D i odgovarajući proizvod (2). Formirajmo determinantu E na taj način što ćemo sve elemente iz D koji ne pripadaju posmatranom proizvodu (2) zameniti sa nulom. Graf pridružen determinanti E je tačno posmatrani faktor F. Neka faktor F sadrži $p(F)=p$ kontura koje sadrže redom $n_1, \ldots, n_p$ $(n_1+\cdots+n_p=n)$ čvorova.

Posmatrajmo determinantu E' nastalu iz E na taj način što su u E zamenjena mesta najpre i-toj i j-toj vrsti a zatim u nastavku i-toj i j-toj koloni. Graf F' pridružen determinanti E' nastaje od F na taj način što se najpre grana koja je ulazila u čvor i premešta tako da ulazi u čvor j i grana koja je ulazila u j premešta kod čvora i a zatim se ovakva zamena vrši sa granama koje izlaze iz čvorova i, j. Oblik pridruženog grafa ostaje isti samo što čvor koji je nosio oznaku i nosi sada oznaku j i obrnuto. Oznake čvorova su, dakle, izmenile mesta. Međutim, važi $E=E'$, tj. opisanom operacijom se vrednost determinante ne menja.

Postupak možemo nastaviti sve dotle dok razmeštaj oznaka čvorova u pridruženom grafu ne dobije sledeću strukturu. U prvoj konturi čvorovi nose oznake $1, 2, \ldots, n_1$ kada idemo po konturi u pravcu orijentacije grana konture u drugoj konturi, slično tome, oznake idu redom $n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2$; i tako redom za sve konture. Determinanta $E^*=\det \| e_{ij} \|_1^n$ kojoj je ovaj graf pridružen ima samo jedan sabirak u razvoju različit od nule, na primer,

(3) $$(-1)^k e_{1k_1} \cdots e_{nk_n},$$

gde je k broj inverzija permutacije $k_1 \ldots k_n$. Na osnovu strukture pridruženog grafa permutacija $k_1 \ldots k_n$ je, u stvari, oblika

$$n_1,\ 1,\ 2, \ldots, n_1-1,\ n_1+n_2,\ n_1+1,\ n_1+2, \ldots, n_1+n_2-1, \ldots, n-1.$$

Broj inverzija u ovoj permutaciji je očigledno $n_1-1+n_2-1+\cdots+n_p-1=$ $=n-p$. Stoga (3) ima vrednost

(4) $$(-1)^{n-p} e_{1k_1} \cdots e_{nk_n}=(-1)^{n+p} d_{1j_1} \cdots d_{nj_n}=(-1)^{n+p(F)} C(F).$$

Determinanta (1) se onda može predstaviti u obliku

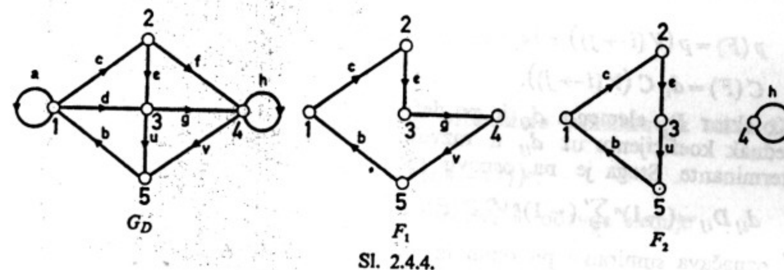
(5) $$D=(-1)^n \sum_i (-1)^{p(F_i)} C(F_i),$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima F_i grafa G_D.

Formula (5) predstavlja, u suštini, jednu generalizaciju SARRUSovog pravila. Za determinantu

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & h & 0 \\ 0 & 0 & u & v & 0 \end{vmatrix}$$

prikazan je na sl. 2.4.4 pridruženi graf G_D i svi njegovi faktori.



Sl. 2.4.4.

Formula (5) daje

$$D=bcegv-bceuh.$$

Lako se može shvatiti, da je graf pridružen determinanti jednostavniji (a samim tim i proces određivanja determinante kraći) kod determinanti koje sadrže mnogo elemenata jednakih nuli. Značaj postupka sa grafovima se sastoji najpre u tome što postoje oblasti primene gde se po pravilu pojavljuju baš determinante ovakve vrste (na primer, teorija električnih kola).

Pokazaćemo sada kako se kofaktori determinante mogu odrediti pomoću grafa pridruženog determinanti. U tom cilju ćemo uvesti pojam veze $V(i \to j)$ između čvorova i i j u grafu G.

Neka je $i \neq j$. Delimični graf grafa G naziva se veza čvora i sa čvorom j, u oznaci $V(i \to j)$, ako ima sledeće osobine:

1° Iz čvora i izlazi tačno jedna grana;

2° U čvor j ulazi tačno jedna grana;

3° Iz ostalih čvorova izlazi tačno jedna i u svaki od njih ulazi tačno jedna grana.

Lako se zaključuje da jedna komponenta veze od i ka j predstavlja elementarni put (graf sa, na primer, s čvorova koji se mogu numerisati brojevima $1, \ldots, s$ tako da za svako $i=1, \ldots, s-1$ postoji grana koja vodi iz čvora i u čvor $i+1$ i da druge grane, osim navedenih, ne postoje) od i do j a da ostale komponente veze, ukoliko postoje, predstavljaju konture.

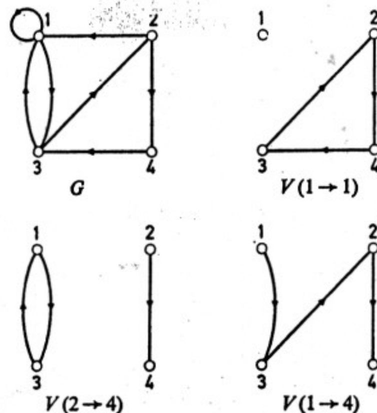
Veza $V(i\to i)$ čvora i sa čvorom i u G je delimični graf grafa G sa sledećim osobinama:

1° Čvor i je izolovan čvor;

2° Iz ostalih čvorova izlazi tačno jedna i u svaki od njih ulazi tačno jedna grana.

Prenos $C\big(V(i\to j)\big)$ veze $V(i\to j)$ se definiše kao proizvod brojeva pridruženih granama koje se nalaze u vezi.

Na sl. 2.4.5 prikazan je jedan graf sa nekoliko svojih veza.



Sl. 2.4.5.

Posmatrajmo faktor F grafa G koji sadrži granu označenu sa d_{ij}. Ako se ova grana udalji iz faktora dobija se jedna veza $V(i\to j)$. Ako $p(G)$ označava broj komponenata (odvojenih delova) grafa G koje predstavljaju konture, važe očigledno sledeće relacije

(6) $\quad p(F)=p\big(V(i\to j)\big)+1,$

(7) $\quad C(F)=d_{ij}\,C\big(V(i\to j)\big).$

Kofaktor D_{ij} elementa d_{ij} je po definiciji jednak koeficijentu uz d_{ij} u razvoju (1) determinante. Stoga je na osnovu (5)

(8) $\quad d_{ij}D_{ij}=(-1)^n \sum_F{}' (-1)^{p(F)}C(F),$

gde $\sum_F{}'$ označava sumiranje po onim faktorima F grafa G_D koji sadrže granu označenu sa d_{ij}.

Na osnovu (8), (6) i (7) je

(9) $\quad D_{ij}=(-1)^n \sum_{V(i\to j)} (-1)^{p(V(i\to j))+1}\,C\big(V(i\to j)\big),$

gde se sumiranje vrši po svim vezama $V(i\to j)$ grafa G_D.

Ako je $d_{ij}=0$, u grafu G_D se povlači grana iz čvora j u čvor i kojoj se pridružuje broj 0, pa se opet dobija formula (9).

2.5. ADJUNGOVANA MATRICA I ADJUNGOVANA DETERMINANTA

Definicija 1. *Ako je A_{ik} kofaktor elementa a_{ik} matrice*

$$A=\|a_{ik}\|_1^n=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{Vmatrix},$$

tada se matrica

$$\operatorname{adj} A=\operatorname{adj}\|a_{ik}\|_1^n=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn}\end{Vmatrix}$$

zove adjungovana matrica matrice A.

Determinanta matrice adj A *zove se adjungovana determinanta determinante matrice A.*

Stav 1. $A\cdot\operatorname{adj}A=(\operatorname{adj}A)\cdot A=(\det A)\,I.$

Dokaz. Element na mestu (i,k) u proizvodu $A\cdot\operatorname{adj}A$ je $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}$, tj. na osnovu stava 4 is 2.3, $\delta_{ik}\det A$. Prema tome

$$A\cdot\operatorname{adj}A=\operatorname{diag}(\det A,\ldots,\det A)=(\det A)\cdot I.$$

Slično se dokazuje i jednakost $(\operatorname{adj}A)\cdot A=(\det A)\cdot I$.

Kako je $\det(AB)=(\det A)(\det B)$, iz stava 1 dobijamo:

Stav 2. *Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je*

(1) $\quad \det A\cdot\det\operatorname{adj}A=(\det A)^n.$

Važan je i sledeći stav:

Stav 3. *Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je*

(2) $\quad \det\operatorname{adj}A=(\det A)^{n-1}.$

Dokaz. Ako na matricu $A-\lambda I$ (λ skalar) primenimo jednakost iz stava 2, dobijamo

$$\det(A-\lambda I)\cdot\det\operatorname{adj}(A-\lambda I)=\big(\det(A-\lambda I)\big)^n.$$

Kako je $\det(A-\lambda I)$ polinom po λ stepena n, odavde sleduje

(3) $\quad \det\operatorname{adj}(A-\lambda I)=\big(\det(A-\lambda I)\big)^{n-1}.$

Stavljajući $\lambda=0$, iz (3) dobijamo (2).

PRIMER 1.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix}\ \Rightarrow\ \operatorname{adj}A=\begin{Vmatrix} -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Bez teškoće se proverava ispravnost jednakosti (2) u ovom slučaju jer je $n=3$, $\det A=2$, $\det\operatorname{adj}A=4$.

2.6. CRAMEROV SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA

Posmatrajmo sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih

(1)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ &\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n&=h_n.\end{aligned}$$

Determinanta koeficijenata uz nepoznate

(2)
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

zove se *determinanta sistema* (1).

Pretpostavimo da sistem (1) ima rešenje i da je ono $(x_1, \ldots, x_n)$. Ako u determinanti

$$D \cdot x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}x_k & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{nk}x_k & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

elementima k-te kolone dodamo odgovarajuće elemente svih ostalih kolona pošto ih redom pomnožimo sa $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, dobijamo, uzimajući u obzir jednačine (1),

$$D \cdot x_k = D_k,$$

gde je

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & h_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,k-1} & h_n & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako je $D \neq 0$, dobijamo CRAMERove formule

(3) $$x_k = \frac{D_k}{D} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Dakle, dokazali smo: Ako sistem linearnih jednačina (1), kada je $D \neq 0$, *ima rešenje*, ono je dato formulama (3).

Dokažimo sada da je u slučaju $D \neq 0$, (3) zaista rešenje sistema (1).

Ako u izrazu

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D}$$

determinante D_i razvijemo po elementima i-te kolone $(i = 1, \ldots, n)$, posle sređivanja dobijamo

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}\big(h_1(a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) + \cdots + h_n(a_{11}A_{n1} + \cdots + a_{1n}A_{nn})\big).$$

Ako na ovu jednakost primenimo stav 4 iz 2.3, dobijamo

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = h_1.$$

Ovim smo dokazali da je (3) rešenje prve jednačine sistema (1). Analogno se dokazuje da je (3) rešenje i ostalih jednačina sistema (1).

Dakle, važi sledeći rezultat:

Stav 1. *Ako je $D \neq 0$, gde je D definisano sa* (2), *sistem jednačina* (1) *ima jedinstveno rešenje i ono je dato formulama* (3).

Diskusija u slučaju $D = 0$ izvodi se slično kao u slučaju sistema od tri jednačine (videti primer 1), ali je znatno složenija. Preglednija diskusija izvodi se uvođenjem pojma ranga matrice (videti 4.1, 4.7 i 4.8).

Ako je $h_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, sistem jednačina (1) zove se *homogen* i on ima jedinstveno rešenje $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ kada je $D \neq 0$. Takvo rešenje zove se *trivijalno*.

Ako je $D = 0$ za homogeni sistem i, na primer, kofaktor $A_{nn} \neq 0$, treba izostaviti poslednju jednačinu. Tada ovako formirani sistem treba posmatrati kao sistem sa $n-1$ nepoznatih $x_1, \ldots, x_{n-1}$ i naći ove nepoznate kao funkcije od x_n.

Bez teškoće se može pokazati da ovako određena rešenja zadovoljavaju i izostavljenu jednačinu.

O slučaju kada su svi kofaktori $A_{ik} = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ biće detaljnije govora kasnije.

CRAMERove formule nisu podesne za praktična izračunavanja. Da bismo rešili sistem od n jednačina sa n nepoznatih, treba izračunati vrednosti $n+1$ determinanata. U stvari, čim je $n > 4$, CRAMERove formule se ne upotrebljavaju za praktična izračunavanja. Tada se koristi GAUSSov algoritam (o kome će biti govora u 2.8), ili neki drugi metod. Međutim, CRAMERove formule imaju veliki teorijski značaj.

PRIMER 1. Na primeru sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznate analiziraćemo izloženi metod za rešavanje i diskusiju.

Posmatrajmo sistem

(1) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= h_3, \end{aligned}$$

i pretpostavimo da ima bar jedno rešenje (x_1, x_2, x_3).

Determinanta sistema (1) je

(2) $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

odakle je

$$D \cdot x_1 = \begin{vmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ako prvoj koloni u prethodnoj determinanti dodamo drugu kolonu pomnoženu sa x_2 i treću pomnoženu sa x_3, dobijamo

$$D \cdot x_1 = \begin{vmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

tj. s obzirom na (1),

(3) $$D \cdot x_1 = D_1,$$

gde je

$$D_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Slično nalazimo

(4) $$D \cdot x_2 = D_2 \quad \text{i} \quad D \cdot x_3 = D_3,$$

gde je

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}.$$

Razlikovaćemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Ako je $D\neq 0$, iz (3) i (4) sleduje

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{5}$$

Ovo su CRAMERove formule.

Dokažimo sada da je $\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right)$ rešenje sistema (1). Ako u izrazu

$$a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+a_{13}\frac{D_3}{D}$$

razvijemo determinante D_i $(i=1, 2, 3)$ po elementima i-te kolone, posle sređivanja dobijamo

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+a_{13}\frac{D_3}{D}=\frac{1}{D}\big(&h_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13})\\ &+h_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})\\ &+h_3(a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33})\big). \end{aligned}$$

Primenom stava 1 iz 2.3 na kraju dobijamo

$$a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+a_{13}\frac{D_3}{D}=h_1\frac{D}{D}=h_1,$$

što znači da uređena trojka $\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right)$ zadovoljava prvu jednačinu sistema (1).

Slično se dokazuje da je pomenuta trojka rešenje i ostalih jednačina sistema (1).

Drugi slučaj. Pretpostavimo sada da je $D=0$ i da je bar jedan od devet algebarskih komplemenata A_{ik} elemenata a_{ik} različit od nule, tj. neka je, na primer, $A_{33}\neq 0$.

Uporedo sa sistemom jednačina (1) posmatrajmo sistem od sledeće tri jednačine

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=h_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=h_2,\\ &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3-h_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-h_3 \end{vmatrix}=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dokazaćemo da su sistemi jednačina (1) i (6) ekvivalentni.

Neka je (x_1, x_2, x_3) jedno rešenje sistema jednačina (1). Kako se determinanta, koja se javlja u sistemu jednačina (6), svodi u tom slučaju na

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix},$$

zaključujemo da je (x_1, x_2, x_3) rešenje i sistema jednačina (6).

Obrnuto, neka je (x_1, x_2, x_3) jedno rešenje sistema jednačina (6).

Ako se determinanta, koja se javlja u sistemu jednačina (6), razvije, dobija se

$$\begin{aligned} (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1)A_{13}+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3-h_2)A_{23}&\\ +(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-h_3)A_{33}&=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Kako je, prema pretpostavci,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1=0,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3-h_2=0,$$

iz jednakosti (7) sleduje

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-h_3=0 \qquad (\text{jer je } A_{33}\neq 0).$$

Prema tome, pri uslovu $D=0$ i $A_{33}\neq 0$, dokazali smo ekvivalentnost sistema jednačina (1) i (6).

Treća jednačina iz sistema (6) može se predstaviti u obliku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1\\ a_{21} & a_{22} & h_2\\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}.$$

Kako je $D=0$, poslednja jednakost postaje

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=D_3.$$

Prema tome, sistem jednačina (6) odnosno (1), nema rešenja, ako je $D_3\neq 0$. Ako je $D_3=0$, sistem (6) ima rešenja i svodi se na dve jednačine

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=h_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=h_2 \end{aligned} \tag{8}$$

sa tri nepoznate. Ovde je nepoznata x_3 proizvoljna. Za ovakav sistem jednačina kaže se da je *neodređen*.

Ako je $D_3=0$, sistemi (1) i (8) su ekvivalentni. Rešenja su:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} h_1-a_{13}x_3 & a_{12}\\ h_2-a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1-a_{13}x_3\\ a_{21} & h_2-a_{23}x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

gde je $A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$

Ako je (x_1, x_2, x_3) jedno rešenje sistema (1) i ako je $D=0$, tada je, prema (3) i (4), $D_1=0$, $D_2=0$, $D_3=0$.

Pretpostavimo sada da su svi kofaktori A_{ik} jednaki nuli, a da je bar jedan od koeficijenata a_{ik} različit od nule. Neka je to a_{11}.

Uporedo sa (1) posmatrajmo sledeći sistem od tri jednačine:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1=0,\\ &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1\\ a_{21} & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3-h_2 \end{vmatrix}=0,\\ &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-h_1\\ a_{31} & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-h_3 \end{vmatrix}=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Sistemi (1) i (9) su ekvivalentni.

Vodeći računa o učinjenim pretpostavkama, poslednje dve jednačine iz (9) svode se na

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & h_1\\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix},$$

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & h_1\\ a_{31} & h_3 \end{vmatrix}.$$

Ako je bar jedna od determinanata

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{31} & h_3 \end{vmatrix}$$

različita od nule, sistem jednačina (1) nema rešenja.

Ako su obe determinante (10) jednake nuli, sistem jednačina (9) svodi se na jedinu jednačinu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 .$$

Odavde sleduje

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - h_1) \qquad (a_{11} \neq 0).$$

Pri navedenim, uslovima, nepoznate x_2 i x_3 su proizvoljne.

Ako su svi koeficijenti a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ nule, sistem jednačina (1) svodi se na

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = h_r \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Ako je bar jedan od brojeva h_1, h_2, h_3 različit od nule, sistem jednačina (1) nema rešenja. U slučaju kada je $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$, rešenje sistema (1) je svaka trojka brojeva (x_1, x_2, x_3).

2.7. REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA POMOĆU GRAFOVA[1]

Rešenje sistema linearnih algebarskih jednačina može se odrediti pomoću jednog grafa koji je pridružen sistemu algebarskih jednačina. U vezi sa tim uvodimo sledeću definiciju.

Neka je dat sistem linearnih algebarskih jednačina

$$(1)\qquad Ax = B,$$

gde je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ matrica koeficijenata, $x\,(x^T = \|x_1 \cdots x_n\|)$ matrica (kolona) nepoznatih i $B\,(B^T = \|b_1 \cdots b_n\|)$ matrica (kolona) slobodnih članova. COATESov graf G pridružen sistemu (1) je graf sa $n+1$ čvorova koji su obeleženi sa $0, 1, \ldots, n$ i u kome postoje samo one grane (i/ili petlje) koje su određene pomoću:

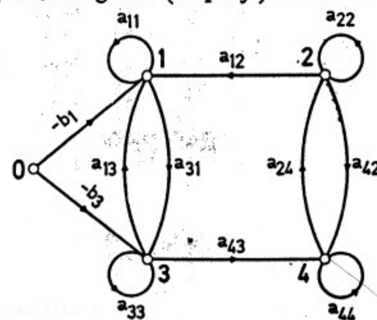
1° ako je $a_{ij} \neq 0$ iz čvora j vodi orijentisana grana (ili petlja) u čvor i i ona je obeležena sa a_{ij};

2° ako je $b_i \neq 0$ iz čvora 0 vodi orijentisana grana u čvor i i ona je obeležena sa $-b_i$.

COATESov graf sistema linearnih jednačina

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \qquad\qquad &= b_1, \\ a_{22}x_2 \qquad\qquad + a_{24}x_4 &= 0, \\ a_{31}x_1 \qquad + a_{33}x_3 \qquad\qquad &= b_3, \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

prikazan je na sl. 2.7.1.



Sl. 2.7.1.

Deo COATESovog grafa koji se dobija kada se iz G udalji čvor 0 sa svojim granama je graf G_A pridružen matrici A (odnosno determinanti $\det A$).

[1] Odeljak 2.7. izradio je D. CVETKOVIĆ.

Neka je $V(i \to j)$ jedna veza i sa j u G_A. Ako u G postoji grana označena sa $-b_i$, vezi $V(i \to j)$ odgovara u G jedna i samo jedna veza $V(0 \to j)$ koja nastaje kada se granama veze $V(i \to j)$ doda grana označena sa $-b_i$. Tada je, očigledno,

$$(3)\qquad C(V(0 \to j)) = -b_i\, C(V(i \to j)).$$

Prelazimo na rešavanje sistema (1).

Pretpostavimo da je $\det A \neq 0$, tj. da rešenje sistema postoji i da je ono jedinstveno. Prema CRAMERovim formulama tada je:

$$(4)\qquad x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

gde je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} u matrici A.

Na osnovu (5) i (9) iz 2.4 formula (4) postaje

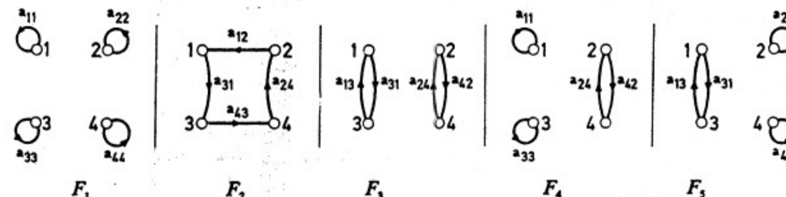
$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \sum_{V(i \to j)} b_i (-1)^{p(V(i \to j))+1} C(V(i \to j))}{(-1)^n \sum_F (-1)^{p(F)} C(F)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Ako se uzme u obzir (3), dobija se

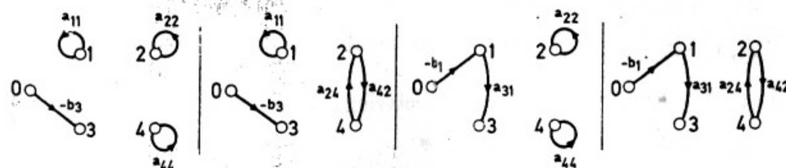
$$x_j = \frac{\sum_{V(0 \to j)} (-1)^{p(0 \to j)} C(V(0 \to j))}{\sum_F (-1)^{p(F)} C(F)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

pri čemu se u brojiocu sumiranje vrši po svim vezama $V(0 \to j)$ čvora 0 sa čvorom j u grafu G a u imeniocu po svim faktorima F grafa G_A.

Na sl. 2.7.2. (a) prikazani su svi faktori grafa pridruženog matrici sistema jednačina (2) a na sl. 2.7.2 (b) sve veze čvora 0 sa čvorom 3 COATESovog grafa sa sl. 2.7.1.



Sl. 2.7.2 (a).



Sl. 2.7.2 (b).

Na osnovu toga a prema (4) za veličinu x_3 dobijamo

$$x_3=\frac{b_3a_{11}a_{22}a_{44}-b_3a_{11}a_{42}a_{24}-b_1a_{31}a_{22}a_{44}+b_1a_{31}a_{24}a_{42}}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}+a_{13}a_{31}a_{42}a_{24}-a_{11}a_{33}a_{42}a_{24}-a_{22}a_{44}a_{13}a_{31}}.$$

Poseban značaj ovog metoda sastoji se u tome što se graf iz koga se određuje rešenje može nacrtati na osnovu poznavanja strukture fizičkog sistema koji se opisuje linearnim jednačinama, bez da se same jednačine ispisuju (teorija električnih kola, sistemi automatskog upravljanja).

Pri praktičnom radu sa ovom metodom faktori i veze se obično ne ističu posebno, nego se nepoznata veličina koja se traži određuje direktno iz COATES-ovog grafa. Ovo zahteva izvesnu rutinu jer se nepažnjom mogu izostaviti neke veze ili faktori. Mada nije poznato neko efikasno opšte pravilo za sistematsko nalaženje faktora i veza, za preporuku je, na primer, sledeće. Faktore je mogućno grupisati prema broju petlji koje ulaze u faktor. Za nalaženje veza $V(0\rightarrow j)$ potrebno je odrediti sve elementarne puteve iz čvora 0 u čvor j a ovi putevi se mogu klasificirati prema čvorovima koji slede neposredno posle čvora 0.

Opisana metoda je namenjena za ručno računanje. Upotreba kompjutera u vezi sa ovom metodom nije preporučljiva jer kompjuter troši mnogo vremena za raspoznavanje faktora i veza u grafu. Praktična upotrebljivost ove metode je ograničena na sisteme jednačina sa ne više od desetak nepoznatih uz uslov da pridruženi graf ima relativno mali broj grana. U protivnom je praktično nemogućno odrediti sve faktore i potrebne veze u grafu.

Korišćenje grafova za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je naročito pogodno ako su koeficijenti sistema opšti brojevi.

Osim prednosti koje reprezentacija determinante pomoću grafa pruža pri praktičnim izračunavanjima, njen značaj se sastoji i u tome što ona omogućava rešavanje i opštijih problema linearne algebre.

PRIMEDBA 1. Za poslednjih dvadesetak godina razvijeno je više metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina pomoću grafova. Dve glavne metode dali su S. J. MASON i C. L. COATES. Gore opisana metoda pripada C. L. COATESU.

2.8. GAUSSOV ALGORITAM

2.8.1. GAUSSOV METOD ELIMINACIJE

Za efektivno određivanje rešenja jednog sistema linearnih jednačina ako je broj nepoznatih veći od tri, najčešće se primenjuje GAUSSOV metod eliminacije, koji ćemo sada izložiti.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=h_2,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=h_m.\end{aligned}$$

Neka je $m\geqq n$.

Pretpostavimo da je $a_{11}\neq 0$. Levoj i desnoj strani druge jednačine dodajmo odgovarajuće strane prve jednačine posle množenja sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Zatim trećoj jednačini dodajmo prvu posle množenja sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, itd.

Na taj način dobijamo sledeći sistem jednačina ekvivalentan sistemu (1)

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=h_2^{(1)},\\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(1)}x_n&=h_3^{(1)},\\ &\vdots\\ a_{m2}^{(1)}x_2+a_{m3}^{(1)}x_3+\cdots+a_{mn}^{(1)}x_n&=h_m^{(1)}.\end{aligned}$$

Ako je $a_{22}^{(1)}\neq 0$, isti postupak eliminacije primenjujemo na sistem od $m-1$ poslednjih jednačina sistema (2).

Kao rezultat eliminacije nepoznate x_2 iz $m-2$ poslednjih jednačina dobija se nov sistem jednačina ekvivalentan sistemu (2):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=h_2^{(1)},\\ a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=h_3^{(2)},\\ &\vdots\\ a_{m3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{mn}^{(2)}x_n&=h_m^{(2)}.\end{aligned}$$

Posle $(n-1)$-ve eliminacije dobija se sistem jednačina

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=h_2^{(1)},\\ a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=h_3^{(2)},\\ &\vdots\\ a_{nn}^{(n-1)}x_n&=h_n^{(n-1)},\\ a_{n+1,n}^{(n-1)}x_n&=h_{n+1}^{(n-1)},\\ &\vdots\\ a_{mn}^{(n-1)}x_n&=h_m^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Gornji indeks k pokazuje da su odnosni koeficijenti dobijeni posle k-te primene eliminacije.

Svođenje sistema (1) na ekvivalentan sistem (3) izvedeno je pod pretpostavkom da je

$$a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)}\cdots a_{n-1,n-1}^{(n-2)}\neq 0.$$

Ako je međutim, $a_{kk}^{(k-1)}=0$, gde je $a_{kk}^{(k-1)}$ prvi u nizu brojeva

$$a_{11},\ a_{22}^{(1)},\ \ldots,\ a_{n-1,\,n-1}^{(n-2)}$$

koji je nula, pre nego što se pređe na k-tu eliminaciju, treba zameniti k-tu jednačinu u sistemu dobijenom posle $k-1$ eliminacije j-tom jednačinom ($j=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ m$) koju treba tako izabrati da je $a_{j,k}^{(k-1)}\neq 0$. Ako je međutim

$$a_{kk}^{(k-1)}=a_{k+1,\,k}^{(k-1)}=\cdots=a_{mk}^{(k-1)}=0,$$

nepoznatu x_k treba uzeti proizvoljno i sistem (1) posmatrati kao sistem od m jednačina sa $n-1$ nepoznatih.

Sistem (1) u slučaju $m\geqq n$ ima rešenja ako i samo ako je

$$\text{(4)}\qquad \frac{h_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}=\frac{h_{n+1}^{(n-1)}}{a_{n+1,\,n}^{(n-1)}}=\cdots=\frac{h_m^{(n-1)}}{a_{mn}^{(n-1)}}.$$

Ako je $m>n$ i jednakosti (4) ne važe, sistem (1) nema rešenja.

Ako je $m<n$, postupak je isti s tim što ćemo moći da odredimo najviše m nepoznatih u funkciji ostalih $n-m$ nepoznatih.

Primer 1. Primenom Gaussovog algoritma rešimo sistem jednačina

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=4,\\ 2x_1-3x_2-4x_3+x_4&=1,\\ x_1-x_2-x_3-3x_4&=1,\\ 2x_1-3x_2+2x_4&=5,\\ x_1-2x_2+2x_3+x_4&=5. \end{aligned}$$

Levoj i desnoj strani druge jednačine dodajemo odgovarajuće strane prve jednačine pomnožene sa -2. Trećoj jednačini dodajmo prvu pomnoženu sa -1. Četvrtoj jednačini dodajmo prvu posle množenja sa -2. Petoj jednačini dodajmo prvu pomnoženu sa -1. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=4,\\ x_2-6x_3+3x_4&=-7,\\ x_2-2x_3-2x_4&=-3,\\ x_2-2x_3+4x_4&=-3,\\ x_3+2x_4&=1. \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina ekvivalentan je sistemu (1).

Oduzmimo sada od treće i četvrte jednačine drugu jednačinu ovoga sistema. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=4,\\ x_2-6x_3+3x_4&=-7,\\ 4x_3-5x_4&=4,\\ 4x_3+x_4&=4,\\ x_3+2x_4&=1. \end{aligned}$$

Najzad, umesto ovoga sistema jednačina možemo posmatrati sistem

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=4,\\ x_2-6x_3+3x_4&=-7,\\ 4x_3-5x_4&=4,\\ 6x_4&=0,\\ -13x_4&=0, \end{aligned}$$

u kome je četvrta jednačina nastala eliminacijom x_3 iz treće i četvrte jednačine i peta jednačina eliminacijom x_3 iz pete i treće jednačine. Kako je $\dfrac{0}{-13}=\dfrac{0}{6}$, sistem jednačina (1) ima rešenja.

Iz četvrte jednačine sistema (2) dobijamo $x_4=0$; na osnovu ovoga iz treće jednačine dobijamo $x_3=1$; iz druge jednačine sleduje $x_2=-1$ i najzad iz prve jednačine $x_1=1$. Ovo su zaista rešenja sistema (1), što se bez teškoće može proveriti.

2.8.2. BANAHIJEVIČEVA SHEMA

Zadržimo se prvo na slučaju kada je $m=n$.

Ako stavimo

$$\text{(1)}\qquad c_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\qquad (i=k+1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ n-1;\ a_{ik}^{(0)}=a_{ik}),$$

koeficijenti $a_{ik}^{(j)}$ određeni su sa

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} a_{ik}^{(1)}&=a_{ik}-c_{i1}\,a_{1k} && (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n),\\ a_{ik}^{(2)}&=a_{ik}^{(1)}-c_{i2}\,a_{2k}^{(1)} && (k=3,\ 4,\ \ldots,\ n),\\ a_{ik}^{(3)}&=a_{ik}^{(2)}-c_{i3}\,a_{3k}^{(2)} && (k=4,\ 5,\ \ldots,\ n),\\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Stavimo još

$$b_{ij}=a_{ij}^{(i-1)}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=i,\ i+1,\ \ldots,\ n);$$

tada iz (2) dobijamo

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} a_{ik}^{(1)}&=a_{ik}-c_{i1}\,b_{1k} && (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n),\\ a_{ik}^{(2)}&=a_{ik}-c_{i1}\,b_{1k}-c_{i2}\,b_{2k} && (k=3,\ 4,\ \ldots,\ n),\\ a_{ik}^{(3)}&=a_{ik}-c_{i1}\,b_{1k}-c_{i2}\,b_{2k}-c_{i3}\,b_{3k} && (k=4,\ 5,\ \ldots,\ n),\\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

a iz (1), na osnovu (3),

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} c_{i1}&=\frac{a_{i1}}{b_{11}} && (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n),\\ c_{i2}&=\frac{a_{i2}-c_{i1}\,b_{12}}{b_{22}} && (i=3,\ 4,\ \ldots,\ n),\\ c_{i3}&=\frac{a_{i3}-c_{i1}\,b_{13}-c_{i2}\,b_{23}}{b_{33}} && (i=4,\ 5,\ \ldots,\ n),\\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Formule (3) i (4) mogu se prikazati kraće u obliku

$$\text{(5)}\qquad b_{ik}=a_{ik}-c_{i1}\,b_{1k}-c_{i2}\,b_{2k}-\cdots-c_{i,\,i-1}\,b_{i-1,\,k}\qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ k=i,\ \ldots,\ n),$$

$$\text{(6)}\qquad c_{ik}=\frac{a_{ik}-c_{i1}\,b_{1k}-c_{i2}\,b_{2k}-\cdots-c_{i,\,k-1}\,b_{k-1,\,k}}{b_{kk}}\qquad (i=k+1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ n).$$

Kako se koeficijenti $h_i^{(j)}$ izračunavaju isto kao i b_{ij}, ako stavimo

$$b_i = h_i^{(i-1)} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

imamo

$$b_i = h_i - c_{i1}b_1 - c_{i2}b_2 - \cdots - c_{i,i-1}b_{i-1} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{7}$$

Tada su nepoznate x_i određene sa

$$x_n = \frac{b_n}{b_{nn}}, \quad x_{n-1} = \frac{-b_{n-1} + b_{n-1,n}x_n}{-b_{n-1,n-1}}, \ldots$$

ili uopšte

$$x_i = \frac{-b_i + b_{in}x_n + b_{i,n-1}x_{n-1} + \cdots + b_{i,i+1}x_{i+1}}{-b_{ii}} \qquad (i=n, \ldots, 2, 1). \tag{8}$$

Shema koju ćemo upotrebiti za rešavanje sistema n linearnih jednačina sa n nepoznatih ima oblik:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	$a_{1,n-1}$	a_{1n}	h_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}		$a_{2,n-1}$	a_{2n}	h_2
$\vdots$						
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}		$a_{n,n-1}$	a_{nn}	h_n
b_{11}	b_{12}	b_{13}	$\cdots$	$b_{1,n-1}$	b_{1n}	b_1
$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}		$b_{2,n-1}$	b_{2n}	b_2
$-c_{31}$	$-c_{32}$	b_{33}		$b_{3,n-1}$	b_{3n}	b_3
$\vdots$						
$-c_{n-1,1}$	$-c_{n-1,2}$	$-c_{n-1,3}$		$b_{n-1,n-1}$	$b_{n-1,n}$	b_{n-1}
$-c_{n1}$	$-c_{n2}$	$-c_{n3}$		$-c_{n,n-1}$	b_{nn}	b_n
x_1	x_2	x_3		x_{n-1}	x_n	

U ovoj shemi b_{ik}, c_{ik}, b_i i x_i izračunavaju se pomoću formula (5), (6), (7) i (8).

Prilikom određivanja elemenata c_{ij} i b_{ij} prvo treba izračunati elemente prve vrste, zatim elemente prve kolone. Posle toga izračunavaju se elementi druge vrste, pa druge kolone itd.

Ova shema naziva se BANAHIJEVIČeva shema.

PRIMER 1. Za sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= -7, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= -1, \end{aligned}$$

navedena shema ima oblik

1	2	−1	1	1
2	−1	−3	2	2
3	−2	1	−5	−7
4	3	−1	1	−1
1	2	−1	1	1
−2	−5	−1	0	0
−3	$-\frac{8}{5}$	$\frac{28}{5}$	−8	−10
−4	−1	$-\frac{5}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{15}{7}$
$-\frac{27}{38}$	$\frac{5}{38}$	$-\frac{25}{38}$	$\frac{15}{19}$	

PRIMER 2. BANAHIJEVIČeva shema za rešavanje sistema jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

glasi

1	−1	1	2	1
1	−3	1	0	2
1	1	0	−1	0
2	2	1	3	1
1	−1	1	2	1
−1	−2	0	−2	1
−1	1	−1	−5	0
−2	2	−1	0	1

Kako je poslednji koeficijent $b_{44}=0$ i $b_4 \neq 0$, sistem (1) nema rešenja.

PRIMER 3. BANAHIJEVIČeva shema za sistem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 0, \quad 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 1$$

ima oblik

1	1	1	1	0
1	−1	−1	−3	1
1	1	0	1	0
2	0	−1	−2	1
1	1	1	1	0
−1	−2	−2	−4	1
−1	0	−1	0	0
−2	−1	−1	0	0

Kako je $b_{44}=b_4=0$, nepoznatu x_4 možemo proizvoljno birati. Tada je

$$x_1=\frac{1}{2}+x_4,\quad x_2=-\frac{1}{2}-2x_4,\quad x_3=0.$$

Dakle, rešenje datog sistema jednačina je

$$x_1=\frac{1}{2}+t,\ x_2=-\frac{1}{2}-2t,\ x_3=0,\ x_4=t \qquad (t \text{ proizvoljan realan broj}).$$

Primetimo da se navedena shema može koristiti samo ako je $b_{11}\cdots b_{nn}\neq 0$. Postoji shema na osnovu koje se može rešavati sistem za koji je $b_{11}\cdots b_{nn}=0$, ali je ona za primenu dosta komplikovana. U praksi se obično radi na sledeći način:

Izračuna se prva vrsta. Ako je prvi element različit od nule, izračunavamo prvu kolonu i zatim drugu vrstu. Ako je, pak, prvi element jednak nuli, onda prvu kolonu u celoj shemi zamenjujemo sa onom kolonom u kojoj je element prve vrste $\neq 0$, i zatim izračunavamo elemente nove prve kolone, pa posle toga elemente druge vrste. Ako je element na mestu b_{22} različit od nule, izračunavamo elemente druge kolone i zatim elemente treće vrste. Ako je $b_{22}=0$, drugu vrstu zamenjujemo sa k-tom vrstom gde je $b_{2k}\neq 0$ i izračunavamo elemente te nove druge kolone itd.

PRIMER 4. Primenom BANAHIJEVIČeve sheme rešićemo sledeći sistem jednačina:

(1) $\qquad x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_2-2x_3+x_4=-6,\ x_1-x_2+x_3-x_4=6,\ x_1+2x_2-x_4=1.$

Shema posle izračunavanja elemenata prve vrste, prve kolone i druge vrste ima oblik

1	1	1	1	0
1	1	−2	1	−6
1	−1	1	−1	6
1	2	0	−1	1
1	1	1	1	0
−1	0	−3	0	−6
−1				
−1				

Kako je $b_{22}=0$, zamenićemo drugu i treću kolonu. Posle ovoga, shema ima oblik

x_1	x_3	x_2	x_4	
1	1	1	1	0
1	−2	1	1	−6
1	1	−1	−1	6
1	0	2	−1	1
1	1	1	1	0
−1	−3	0	0	−6
−1	0	−2	−2	6
−1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	−3	6
1	2	−1	−2	

Da rešenje koje smo dobili: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2$ zadovoljava sistem (1), proverava se bez teškoće.

Ako je $m>n$, možemo postupiti na dva načina: 1° Rešiti sistem od n jednačina sa n nepoznatih i proveriti zatim da li dobijena rešenja zadovoljavaju preostalih $m-n$ jednačina; 2° Koristiti shemu operišući istovremeno sa svih m jednačina.

Kakav je postupak pri ovom drugom načinu, vidi se iz sledećeg primera.

PRIMER 5. Za sistem od četiri jednačine sa tri nepoznate:

$$x_1-x_2-2x_3=-3,\ x_1-2x_2+3x_3=7,\ 2x_1-x_2-x_3=0,\ x_1-3x_2-x_3=-1$$

shema glasi

1	−1	−2	−3
1	−2	3	7
2	−1	−1	0
1	−3	−1	−1
1	−1	−2	−3
−1	−1	5	10
−2	1	8	16
−1	−2	−9	−18
1	0	2	

Kako je $\frac{-18}{-9}=\frac{16}{8}$, ovaj sistem jednačina ima jedinstveno rešenje i ono je $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=2$.

Primetimo da smo elemente četvrte vrste u gornjoj shemi izračunavali na potpuno isti način kao elemente treće vrste.

PRIMEDBA 1. Rešavanje linearnih sistema pomoću determinanata iziskuje veoma veliki broj operacija. Primena GAUSSovog algoritma zahteva znatno manji broj operacija. Do skoro se smatralo da je GAUSSov algoritam optimalan metod za rešavanje sistema linearnih jednačina. Međutim, skoro je V. STRASSEN dao jedan algoritam za rešavanje sistema linearnih jednačina koji je bolji od GAUSSovog algoritma, ali ostaje otvoreno pitanje optimalnog algoritma. O ovome videti:

V. STRASSEN: *Gaussian elimination is not optimal.* Numerische Mathematik **13** (1969), 354—356.

Св. МАРКОВ: *Гаусовата схема на изключване не е оптимална.* Физико-Математическо списание (София) **13** (46) (1970), 242—246.

Zadaci za rešavanje

M I, Matrice i determinante: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51, 2.52, 2.53, 2.54, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25.

3. INVERZNE MATRICE

3.1. POJAM INVERZNE MATRICE

Definicija 1. *Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji matrica X takva da je $XA=AX=I$, kažemo da je X inverzna matrica matrice A.*

Inverzna matrica matrice A obeležava se sa A^{-1}.

Definicija 2. *Kvadratna matrica A je regularna (nesingularna) matrica ako ima inverznu matricu. Ako kvadratna matrica A nema inverznu matricu, kažemo da je A singularna (neregularna) matrica.*

PRIMER 1. Neka je data kvadratna matrica drugog reda $A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$. Odredimo matricu $X=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix}$ tako da je $A\cdot X=I$ (I jedinična matrica drugog reda).

Uslov

$$A\cdot X=\begin{Vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

ekvivalentan je sistemu jednačina

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}=1, \qquad a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}=0, \qquad a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}=0, \qquad a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}=1.$$

Iz ovog sistema, pod pretpostavkom $D=\det A\neq 0$, nalazimo

$$x_{11}=\frac{a_{22}}{D}=\frac{A_{11}}{D}, \quad x_{12}=-\frac{a_{12}}{D}=\frac{A_{21}}{D}, \quad x_{21}=-\frac{a_{21}}{D}=\frac{A_{12}}{D}, \quad x_{22}=\frac{a_{11}}{D}=\frac{A_{22}}{D},$$

gde je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} determinante $\det A$.

Bez teškoća se proverava da je za tako određene vrednosti x_{ij}

$$X\cdot A=I, \quad A\cdot X=I.$$

Prema tome, matrica A je regularna ako i samo ako je $D\equiv\det A\equiv a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$, i u tom slučaju je

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}.$$

PRIMER 2. Za matricu trećeg reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

odredimo matricu

$$X=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{Vmatrix},$$

takvu da je $A\cdot X=I$ (I jedinična matrica trećeg reda).

Uslov

$$A\cdot X=\begin{Vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32} & a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32} & a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23}+a_{23}x_{33} \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31} & a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32} & a_{31}x_{13}+a_{32}x_{23}+a_{33}x_{33} \end{Vmatrix}$$

$$=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

ekvivalentan je sistemu jednačina

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}=1, & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}=0, & a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33}=0, \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}=0, & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}=1, & a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23}+a_{23}x_{33}=0, \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31}=0, & a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32}=0, & a_{31}x_{13}+a_{32}x_{23}+a_{33}x_{33}=1. \end{array}$$

Iz ovog sistema jednačina možemo odrediti x_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ ako i samo ako je $D=\det A\neq 0$. Za tako nađene x_{ij} matrica $X=A^{-1}$ postaje

$$X=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{31}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \frac{A_{32}}{D} \\ \frac{A_{13}}{D} & \frac{A_{23}}{D} & \frac{A_{33}}{D} \end{Vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

gde je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} determinante $\det A$.

Na osnovu stava 4 iz 2.3 bez teškoće se proverava da za ovako određenu matricu X važi

$$X\cdot A=I \quad \text{i} \quad A\cdot X=I.$$

Stav 1. *Kvadratna matrica*

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

je regularna ako i samo ako je $\det A\neq 0$.

Ako je $\det A\neq 0$, *inverzna matrica matrice* A *je*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A=\frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

gde je A_{ik} *kofaktor elementa* a_{ik}.

Dokaz. Pretpostavimo da matrica A ima inverznu matricu X, tj. da je $AX=I$. Odavde sleduje $\det A\cdot\det X=1$, pa mora biti $\det A\neq 0$.

Pretpostavimo sada da je $\det A\neq 0$. Tada je, na osnovu stava 1 iz 2.4,

$$A\cdot\operatorname{adj} A=(\operatorname{adj} A)\cdot A=(\det A)\cdot I.$$

Kako je $\det A\neq 0$, odavde dobijamo

$$A\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A=\frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)\cdot A=I.$$

Prema tome je

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A.$$

Ovim je stav dokazan.

Stav 2. *Za svaku regularnu matricu postoji tačno jedna inverzna matrica.*

Dokaz. Egzistencija bar jedne inverzne matrice dokazana je u stavu 1. Pretpostavimo da za regularnu matricu A postoje dve inverzne matrice X i Y. Tada bi važile jednakosti

$$XA=AX=I \quad \text{i} \quad YA=AY=I.$$

Odavde imamo

$$XA=YA \Rightarrow (XA)X=(YA)X \Rightarrow X(AX)=Y(AX) \Rightarrow XI=YI \Rightarrow X=Y.$$

Stav 3. *Ako su* $A_1,\ldots,A_k$ *regularne matrice n-tog reda, njihov proizvod je regularna matrica i važi jednakost*

(1) $$(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Dokaz. Da stav važi za $k=2$, sleduje iz jednakosti:

$$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1})=A_1(A_2A_2^{-1})A_1^{-1}=A_1IA_1^{-1}=A_1A_1^{-1}=I,$$

$$(A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2)=A_2^{-1}(A_1^{-1}A_1)A_2=A_2^{-1}IA_2=A_2^{-1}A_2=I.$$

Ako pretpostavimo sada da (1) važi za neko k, tada takođe važi

$$A_{k+1}^{-1}(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_{k+1}^{-1}A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Odavde, na osnovu toga što smo dokazali stav 3 za $k=2$, dobijamo

$$(A_1\cdots A_{k+1})^{-1}=A_{k+1}^{-1}A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},$$

tj. dokazali smo da stav 3 važi i za $k+1$ ako važi za k.

Stav 4. *Ako je* A *regularna matrica, tada je*

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Dokaz. Ako je A regularna matrica, tada je regularna i matrica A^{T}. Prema tome imamo

$$AA^{-1}=I \Rightarrow (AA^{-1})^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}} \Rightarrow (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=I \Rightarrow (A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Ovim je stav dokazan.

Stav 5. *Ako su A i B komutativne matrice i A regularna matrica, matrice A^{-1} i B su komutativne.*

Dokaz. Množeći jednakost $AB=BA$ sleva sa A^{-1}, dobijamo $B=A^{-1}BA$. Ako dobijenu jednakost pomnožimo zdesna sa A^{-1}, imamo

$$BA^{-1}=A^{-1}B,$$

što je trebalo dokazati.

Ove dve jednake matrice $A^{-1}B$ i BA^{-1} označavaju se $\frac{B}{A}$. Matrica $\frac{B}{A}$ naziva se količnik matrica A i B.

Upotrebimo inverznu matricu za rešavanje matrične jednačine

(2) $AX=B,$

gde je A regularna kvadratna matrice reda n i B kvadratna matrica reda n.

Ako obe strane ove jednačine pomnožimo sleva sa A^{-1}, dobijamo

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,$$

odakle je $X=A^{-1}B$.

Rešenje matrične jednačine

(3) $XA=B \qquad (\det A\neq 0)$

je $X=BA^{-1}$.

Sada možemo kazati nešto više o osobinama matrica o kojima je bilo reči u 1.10.

Naveli smo da za matrice A i B ne mora da važi implikacija

$$AB=O \Rightarrow (A=O \vee B=O).$$

S obzirom na matrične jednačine (2) i (3), možemo tvrditi da ako je A regularna matrica, važi implikacija

$$AB=O \Rightarrow B=O,$$

i da, ako je B regularna matrica, važi implikacija

$$AB=O \Rightarrow A=O.$$

Implikacija

$$AB=AC \Rightarrow B=C$$

ne važi u opštem slučaju, ali važi ako je A regularna matrica.

Isto tako, implikacija

$$BA=CA \Rightarrow B=C$$

ne važi u opštem slučaju, ali važi ako je A regularna matrica.

3.2. JEDNA PRIMENA INVERZNIH MATRICA

CRAMERove formule mogu se takođe izvesti upotrebom inverzne matrice. Determinanta $D=\det\|a_{ik}\|_1^n$ CRAMERovog sistema linearnih jednačina

(1)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n&=h_n \end{aligned}$$

različita je od nule.

Ovaj sistem jednačina može se pomoću matrica predstaviti u obliku

(2) $AX=H,$

gde je

$$A=\|a_{ik}\|_1^n, \quad X=\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Vmatrix}, \quad H=\begin{Vmatrix} h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n \end{Vmatrix}.$$

Ako se sa A^{-1} sleva pomnože obe strane jednakosti (2), dobija se redom

$$X=A^{-1}H,$$

$$X=\frac{1}{D}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{Vmatrix} h_1A_{11}+h_2A_{21}+\cdots+h_nA_{n1}\\ h_1A_{12}+h_2A_{22}+\cdots+h_nA_{n2}\\ \vdots\\ h_1A_{1n}+h_2A_{2n}+\cdots+h_nA_{nn} \end{Vmatrix},$$

gde je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} determinante D.

Odavde sleduje

$$x_k=\frac{1}{D}(h_1A_{1k}+\cdots+h_nA_{nk}),$$

tj.

$$x_k=\frac{D_k}{D} \qquad (k=1,\ldots,n),$$

gde D_k označava determinantu matrice koja se dobija kada se k-ta kolona matrice A zameni kolonom sastavljenom od slobodnih članova.

3.3. ODREĐIVANJE INVERZNE MATRICE GAUSSOVIM ALGORITMOM

Određivanje inverznih matrica je veoma zametno već za kvadratne matrice reda 4. U tom slučaju je potrebno izračunati vrednost jedne determinante reda 4 i 16 determinanta reda 3. Sa povećanjem reda date matrice broj potrebnih operacija se veoma brzo povećava. Stoga se u praksi primenjuju razni metodi

koji omogućavaju brže i lakše nalaženje inverznih matrica. Jedan od najekonomičnijih metoda je GAUSSOV algoritam. Njegovu primenu ilustrovaćemo na primeru matrice A koja je reda 4×4.

Neka je data regularna matrica četvrtog reda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{Vmatrix}$$

i neka je njena inverzna matrica $A^{-1}=\|z_{ij}\|_1^4$. Na osnovu definicije inverzne matrice je

$$AA^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Odavde za određivanje nepoznatih elemenata inverzne matrice A^{-1} dobijamo sledeće sisteme linearnih jednačina:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11}z_{11}+a_{12}z_{21}+a_{13}z_{31}+a_{14}z_{41}&=1,\\ a_{21}z_{11}+a_{22}z_{21}+a_{23}z_{31}+a_{24}z_{41}&=0,\\ a_{31}z_{11}+a_{32}z_{21}+a_{33}z_{31}+a_{34}z_{41}&=0,\\ a_{41}z_{11}+a_{42}z_{21}+a_{43}z_{31}+a_{44}z_{41}&=0;\end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} a_{11}z_{12}+a_{12}z_{22}+a_{13}z_{32}+a_{14}z_{42}&=0,\\ a_{21}z_{12}+a_{22}z_{22}+a_{23}z_{32}+a_{24}z_{42}&=1,\\ a_{31}z_{12}+a_{32}z_{22}+a_{33}z_{32}+a_{34}z_{42}&=0,\\ a_{41}z_{12}+a_{42}z_{22}+a_{43}z_{32}+a_{44}z_{42}&=0;\end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} a_{11}z_{13}+a_{12}z_{23}+a_{13}z_{33}+a_{14}z_{43}&=0,\\ a_{21}z_{13}+a_{22}z_{23}+a_{23}z_{33}+a_{24}z_{43}&=0,\\ a_{31}z_{13}+a_{32}z_{23}+a_{33}z_{33}+a_{34}z_{43}&=1,\\ a_{41}z_{13}+a_{42}z_{23}+a_{43}z_{33}+a_{44}z_{43}&=0;\end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} a_{11}z_{14}+a_{12}z_{24}+a_{13}z_{34}+a_{14}z_{44}&=0,\\ a_{21}z_{14}+a_{22}z_{24}+a_{23}z_{34}+a_{24}z_{44}&=0,\\ a_{31}z_{14}+a_{32}z_{24}+a_{33}z_{34}+a_{34}z_{44}&=0,\\ a_{41}z_{14}+a_{42}z_{24}+a_{43}z_{34}+a_{44}z_{44}&=1.\end{aligned}$$

Kao što vidimo, koeficijenti uz odgovarajuće nepoznate u sistemima (1)—(4) su isti. Na osnovu ovoga, sheme koje se koriste kod Gaussovog algoritma, mogu se objediniti na sledeći način:

					I	II	III	IV
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1
	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	$b_1^{(1)}$	$b_1^{(2)}$	$b_1^{(3)}$	$b_1^{(4)}$
	$-c_{21}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	$b_2^{(1)}$	$b_2^{(2)}$	$b_2^{(3)}$	$b_2^{(4)}$
	$-c_{31}$	$-c_{32}$	b_{33}	b_{34}	$b_3^{(1)}$	$b_3^{(2)}$	$b_3^{(3)}$	$b_3^{(4)}$
	$-c_{41}$	$-c_{42}$	$-c_{43}$	b_{44}	$b_4^{(1)}$	$b_4^{(2)}$	$b_4^{(3)}$	$b_4^{(4)}$
I	z_{11}	z_{21}	z_{31}	z_{41}				
II	z_{12}	z_{22}	z_{32}	z_{42}				
III	z_{13}	z_{23}	z_{33}	z_{43}				
IV	z_{14}	z_{24}	z_{34}	z_{44}				

Prilikom primene ove sheme treba voditi računa da se nepoznate iz vrste obeležene sa I dobijaju ako se iskoristi kolona I u kojoj stoje slobodni članovi; za nepoznate iz vrste obeležene sa II koristi se kolona slobodnih članova obeležena sa II itd.

Iz ovog primera bez teškoće se može uočiti opšti postupak za dobijanje inverznih matrica primenom GAUSSovog algoritma.

PRIMER 1. Odredimo A^{-1} matrice

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{Vmatrix}.$$

Odgovarajuća shema ima oblik

1	2	3	4	1	0	0	0
2	3	1	2	0	1	0	0
1	1	1	−1	0	0	1	0
1	0	−2	−6	0	0	0	1
1	2	3	4	1	0	0	0
−2	−1	−5	−6	−2	1	0	0
−1	−1	3	1	1	−1	1	0
−1	−2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1
22	−17	−1	4				
−6	5	0	−1				
−26	20	2	−5				
17	−13	−1	3				

Prema tome, inverzna matrica je

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{Vmatrix}.$$

3.4. MATRICE SPECIJALNOG TIPA

Definicija 1. *Matrica je realna ako su joj svi elementi realni brojevi.*

Definicija 2. *Matrica je pozitivna ako su joj svi elementi pozitivni brojevi.*

Analogno se definišu: negativne, nenegativne i nepozitivne matrice.

Definicija 3. *Kvadratna matrica je involutivna ako je $A^2=I$.*

PRIMER 1. Matrica

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

je involutivna jer je

$$A^2=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}=I.$$

Definicija 4. *Regularna matrica A je ortogonalna ako je $A^T=A^{-1}$.*

PRIMER 2. Sledeća implikacija kazuje da je matrica A ortogonalna

$$A=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}=A^T.$$

Definicija 5. *Kvadratna matrica A je simetrična ako je $A^T=A$.*

PRIMER 3. Matrica

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

je simetrična.

Stav 1. *Ako regularna matrica A ima dve od tri osobine: involutivnost, ortogonalnost, simetričnost, ona ima i treću osobinu.*

Dokaz. Primera radi, dokazaćemo da je regularna matrica A koja je involutivna i ortogonalna, istovremeno i simetrična.

Iz osobine involutivnosti $A^2=I$, posle množenja sa A^{-1}, sleduje $A=A^{-1}$.

Odavde i iz osobine ortogonalnosti $A^T=A^{-1}$ dobijamo da je $A=A^T$, tj. da je matrica A simetrična.

Slično se dokazuju i ostali slučajevi.

Definicija 6. *Kvadratna matrica A je koso-simetrična ako je $A=-A^T$.*

PRIMEDBA 1. Kod koso-simetričnih matrica elementi na glavnoj dijagonali su jednaki nuli.

PRIMER 4. Matrica

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$$

je koso-simetrična.

Ako je data matrica A sa kompleksnim elementima matrica $\bar{A}$ se dobija tako što se uzmu konjugovane vrednosti od elemenata matrice A.

Definicija 7. *Kvadratna matrica A je hermitska ako je ispunjen uslov $\bar{A}^T=A$.*

Hermitske matrice nazivaju se po francuskom matematičaru HERMITEU.

PRIMER 5. Matrica

$$\begin{Vmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 2 & -2i \\ 1-i & 2i & 0 \end{Vmatrix}$$

je hermitska.

Definicija 8. *Kvadratna matrica A je unitarna ako je $\bar{A}^T=A^{-1}$.*

PRIMER 6. Matrica

$$\begin{Vmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1+i}{2} \end{Vmatrix}$$

je unitarna.

Navedene matrice imaju razne osobine od kojih navodimo sledeće:

Stav 2. *Ako je A realna koso-simetrična matrica i I jedinična matrica, gde je $I-A$ regularna matrica, tada je matrica $(I+A)(I-A)^{-1}$ ortogonalna.*

Stav 3. *Ako je A kvadratna matrica, tada je matrica $A+A^T$ simetrična i $A-A^T$ koso-simetrična.*

Stav 4. *Ako je A kvadratna matrica, tada je matrica $A+\bar{A}^T$ hermitska.*

Stav 5. *Modul determinante unitarne matrice je 1.*

Stav 6. *Ako je A kvadratna matrica, tada je A^TA simetrična matrica i $\bar{A}^TA$ hermitska.*

Stav 7. *Matrice A, A^T, $\bar{A}$ su istovremeno singularne ili regularne.*

Stavovi 2, 3, 4, 5, 6, 7 dokazuju se bez teškoće. Primera radi dokazaćemo stav 6.

***Dokaz stava* 6.** Kako je $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, zaključuje se da je matrica $A^T A$ simetrična.

Kako je

$$\overline{(\bar{A}^T A)}^T = (\bar{\bar{A}}^T \bar{A})^T = (A^T \bar{A})^T = \bar{A}^T A,$$

matrica $\bar{A}^T A$ zaista je hermitska.

Definicija 9. *Za kvadratnu matricu $A\,(\neq O)$ kaže se da je idempotentna ako je $A^2 = A$.*

PRIMER 7. Matrica $\begin{Vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$ je idempotentna.

Definicija 10. *Kvadratna matrica $A\,(\neq O)$ je nilpotentna ako postoji prirodan broj $k>1$ takav da je $A^k = O$.*

PRIMER 8. Matrica

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

je nilpotentna jer je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = O.$$

Dakle, postoji prirodan broj $k = 2\,(>1)$ takav da je $A^2 = O$.

Zadaci za rešavanje

M I, Matrice i determinante: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19.

4. LINEARNE FORME

4.1. RANG MATRICE

Neka je data matrica A tipa $m \times n$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

U matrici A izdvojimo $r\,(\leqq m)$ vrsta, numerisanih sa

$$i_1, \ldots, i_r \quad (1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq m)$$

i $s\,(\leqq n)$ kolona numerisanih sa

$$k_1, \ldots, k_s \quad (1 \leqq k_1 < \cdots < k_s \leqq n).$$

Elementi koji se nalaze u presecima ovih vrsta i kolona obrazuju matricu tipa $r \times s$, naime

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{k_1 k_2 \ldots k_s} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \cdots & a_{i_1 k_s} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & & a_{i_2 k_s} \\ \vdots & & & \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & & a_{i_r k_s} \end{Vmatrix}.$$

Ova matrica zove se *submatrica* matrice A.

Svaka vrsta matrice A je jedna njena submatrica, a takođe i svaka njena kolona.

Ako se i-ta vrsta matrice A označi sa

$$a_i = \| a_{i1} \ \ldots \ a_{in} \| \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

a k-ta kolona sa

$$a^{(k)} = \begin{Vmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{Vmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

matrica A može se prikazati u obliku

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Vmatrix} = \| a^{(1)} \ \ldots \ a^{(n)} \|.$$

Kvadratne submatrice najvišeg reda koje se na navedeni način dobijaju od matrice A imaće red $\min(m, n)$.

Ako je $m \leq n$, kvadratnih submatrica najvišeg reda $(=m)$ biće na broju $\binom{n}{m}$.

Ako je $n \leq m$, kvadratnih submatrica najvišeg reda $(=n)$ biće na broju $\binom{m}{n}$.

Postoji $\binom{m}{p}\binom{n}{p}$ kvadratnih submatrica reda p $(p \leq \min(m, n))$.

Definicija 1. *Matrica A ima rang r ako među njenim kvadratnim submatricama postoji bar jedna regularna submatrica reda r, dok su sve kvadratne submatrice reda višeg od r, ako postoje, singularne. Rang nula-matrice je* 0.

Pojam ranga matrice uveo je O. FROBENIUS 1879.

PRIMER 1. Prve dve vrste matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \end{Vmatrix}$$

su proporcionalne. Stoga su sve kvadratne submatrice reda tri singularne.

Kako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, dobija se rang $A = 2$.

Stav 1. rang $A =$ rang A^{T}.

Dokaz. Ako je rang $A = r$, postoji minor

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \cdots & a_{i_1 k_r} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & & a_{i_2 k_r} \\ \vdots & & & \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

matrice A različit od nule. Minor

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_2 k_1} & \cdots & a_{i_r k_1} \\ a_{i_1 k_2} & a_{i_2 k_2} & & a_{i_r k_2} \\ \vdots & & & \\ a_{i_1 k_r} & a_{i_2 k_r} & & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

matrice A^{T} ima istu vrednost kao minor (1), tj. različit je od nule. Stoga je

$$(2) \qquad \text{rang}\, A^{\mathrm{T}} \geq \text{rang}\, A.$$

Da smo pošli od matrice A^{T} umesto od matrice A, s obzirom na jednakost $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, dobili bismo

$$(3) \qquad \text{rang}\, A \geq \text{rang}\, A^{\mathrm{T}}.$$

Iz (2) i (3) sleduje stav 1.

Stav 2. *Razmenom dve vrste (kolone) ne menja se rang matrice.*

Dokaz. Neka je A proizvoljna matrica i neka je rang $A = r$. Označimo sa B matricu koja se dobija iz A transpozicijom (zamenom) dve vrste. Neka je (1) minor reda r matrice A koji je različit od nule. Isti taj minor, ili taj minor sa izmenjenim redosledom vrsta (kolona), je takođe minor matrice B. Kako se izmenom redosleda vrsta (kolona) može izmeniti samo znak determinante, zaključujemo da matrica B ima minor reda r koji je različit od nule. Uočimo proizvoljni minor reda $r+1$ matrice B. Isti taj minor, ili taj minor sa promenjenim redosledom vrsta (kolona), je takođe minor matrice A, pa je stoga jednak nuli. Dakle, rang $B = r$, pa je ovim stav 2 dokazan.

Na kraju, navešćemo bez dokaza sledeći SYLVESTEROV rezultat:

Stav 3. *Ako su A i B kvadratne matrice reda n i ako je* rang $A \leq$ rang B, *tada je*

$$\text{rang}\, A - (n - \text{rang}\, B) \leq \text{rang}\,(AB) \leq \text{rang}\, A.$$

Neposredna posledica ovog stava je:

Stav 4. *Ako je* $\det B \neq 0$, *tada je*

$$\text{rang}\,(AB) = \text{rang}\,(BA) = \text{rang}\, A.$$

4.2. LINEARNE FORME

Definicija 1. *Izraz oblika*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \qquad (a_k \textit{ konstante})$$

zove se linearna forma n promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

Skup od m linearnih formi predstavlja se u sažetom obliku

$$(1) \qquad f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Matrica $\|a_{ik}\|_{m,n}$ zove se matrica skupa linearnih formi (1).

Definicija 2. *Linearne forme $f_1, \ldots, f_m$ su linearno zavisne ako i samo ako postoje konstante $c_1, \ldots, c_m$, od kojih sve nisu jednake nuli, tako da je*

$$c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m \equiv 0.$$

Inače, forme $f_1, \ldots, f_m$ su linearno nezavisne.

PRIMER 1. Forme

$$f_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \qquad f_2 = -2x_1 + x_2 - x_3, \qquad f_3 = x_1 - 3x_2 - x_3$$

su linearno zavisne. Zaista, izraz $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$ identički se anulira ako i samo ako je

$$c_1 - 2c_2 + c_3 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 - 3c_3 = 0, \qquad 2c_1 - c_2 - c_3 = 0.$$

Determinanta ovog homogenog sistema je jednaka nuli, pa postoje i netrivijalna rešenja. Ona su $c_1 = c_2 = c_3 = k$ (k realan broj), te je

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0.$$

PRIMER 2. Forme

$$f_1 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad f_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \qquad f_3 = x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

su linearno nezavisne.

Zaista, izraz $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$ identički se anulira ako i samo ako je

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \qquad c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0, \qquad c_1 + 3c_2 + 6c_3 = 0.$$

Kako je determinanta ovog homogenog sistema različita od nule, postoje samo trivijalna rešenja $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

4.3. STAV O NEZAVISNOSTI LINEARNIH FORMI

Stav 1. *Ako je rang matrice skupa linearnih formi $f_1, \ldots, f_m$ jednak r, među njima postoji tačno r linearno nezavisnih formi. Sve ostale forme su linearne homogene kombinacije od tih r linearno nezavisnih formi.*

Dokaz. Kako je, po pretpostavci, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \|a_{ik}\| = r$, postoji bar jedna njena regularna submatrica A_r reda r. Ne umanjujući generalnost rezultata, može se pretpostaviti da se matrica A_r nalazi u gornjem levom uglu[1], tj. može se pretpostaviti da matrica A ima oblik[2]

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{r1} & & a_{rr} & a_{r,r+1} & & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & & a_{r+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & & a_{mr} & a_{m,r+1} & & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Neka su $f_1, \ldots, f_r$ linearno zavisne forme. Tada je

$$c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r \equiv 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{r} |c_i| > 0 \right),$$

tj.

$$c_1 (a_{11} x_1 + \cdots + a_{1r} x_r + \cdots + a_{1n} x_n) + \cdots$$
$$+ c_r (a_{r1} x_1 + \cdots + a_{rr} x_r + \cdots + a_{rn} x_n) \equiv 0.$$

Ovaj identitet ekvivalentan je sistemu jednačina

$$\begin{aligned} & c_1 a_{11} + \cdots + c_r a_{r1} = 0, \\ & \qquad \vdots \\ (1) \qquad & c_1 a_{1r} + \cdots + c_r a_{rr} = 0, \\ & \qquad \vdots \\ & c_1 a_{1n} + \cdots + c_r a_{rn} = 0. \end{aligned}$$

Posmatrajmo podsistem ovog sistema jednačina koji dobijamo kada odbacimo poslednjih $n-r$ jednačina u (1), tj. posmatrajmo sistem:

$$\begin{aligned} & c_1 a_{11} + \cdots + c_r a_{r1} = 0, \\ & \qquad \vdots \\ & c_1 a_{1r} + \cdots + c_r a_{rr} = 0. \end{aligned}$$

---

[1] Ako ovo ne bi bio slučaj, izmenili bismo numeraciju nepoznatih i linearnih formi.

[2] Matrica A_r složena je iz polumasnog tipa slova.

Kako je, po pretpostavci, $D = \det A_r \neq 0$, dobijamo

$$c_1 = \frac{0}{D} = 0, \ldots, c_r = \frac{0}{D} = 0 \qquad (D = \det A_r \neq 0).$$

Ovaj rezultat je u protivrečnosti sa pretpostavkom $\sum_{i=1}^{r} |c_i| > 0$, odakle sleduje da u posmatranom sistemu linearnih formi postoji r nezavisnih formi.

Dokazaćemo sada da je linearna forma $f_k (k > r)$ linearna homogena kombinacija formi $f_1, f_2, \ldots, f_r$. U tu svrhu posmatrajmo determinantu reda $r+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & f_1 \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & & a_{rr} & f_r \\ a_{k1} & & a_{kr} & f_k \end{vmatrix}.$$

Ova determinanta razlaže se na n determinanata tipa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} x_s \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & & a_{rr} & a_{rs} x_s \\ a_{k1} & & a_{kr} & a_{ks} x_s \end{vmatrix} = x_s \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix} = x_s D_s \quad (1 \leqq s \leqq n).$$

Ako je $1 \leqq s \leqq r$, determinanta D_s jednaka je nuli, jer su dve kolone u matrici determinante identične.

Ako je $r+1 \leqq s \leqq n$, determinanta D_s jednaka je nuli, zato što je r rang matrice A.

Prema tome, dokazali smo da je $\Delta = 0$.

Ako determinantu Δ razvijemo po elementima poslednje kolone, dobijamo

$$\Delta_1 f_1 + \cdots + \Delta_r f_r + \Delta_k f_k = 0,$$

gde su $\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \Delta_k$ kofaktori elemenata $f_1, \ldots, f_r, f_k$.

Kako je $\Delta_k = D \neq 0$, iz poslednje jednakosti izlazi

$$f_k = -\frac{\Delta_1}{\Delta_k} f_1 - \cdots - \frac{\Delta_r}{\Delta_k} f_r.$$

4.4. STAV O NEZAVISNOSTI VRSTA I KOLONA DETERMINANTE

Definicija 1. *Kaže se da su vrste*

$$\|a_{i1} \ldots a_{in}\| \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

matrice $A = \|a_{ik}\|_{m,n}$ linearno zavisne odnosno linearno nezavisne, prema tome da li su linearne forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

čija je matrica $\|a_{ik}\|_{m,n}$, linearno zavisne odnosno linearno nezavisne.

Definicija 2. *Kaže se da su kolone*

$$\left\| \begin{matrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix} \right\| \qquad (k=1, \ldots, n)$$

matrice $A = \|a_{ik}\|_{m,n}$ *linearno zavisne odnosno linearno nezavisne, prema tome da li su linearne forme*

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ki} x_k \qquad (i=1, \ldots, n),$$

čija je matrica A^T *(*A^T *transponovana matrica matrice* A*), linearno zavisne odnosno nezavisne.*

Stav 1. *Determinanta matrice* A *jednaka je nuli ako i samo ako su vrste njene matrice linearno zavisne.*

Dokaz. Uslov je *potreban*, jer iz pretpostavke da je $\det A = 0$, sleduje

$$\operatorname{rang} A < n.$$

Prema tome, bar jedna vrsta matrice je linearna kombinacija ostalih vrsta.

Uslov je *dovoljan*, jer ako su vrste ove matrice linearno zavisne, determinanta se razlaže u zbir od više determinanata od kojih svaka ima bar dve vrste čiji su koeficijenti proporcionalni.

Stav 2. *Ako su vrste u matrici jedne determinante linearno zavisne, isti je slučaj i sa njenim kolonama.*

Na osnovu izloženog može se formulisati važan:

Stav 3. *Ma kakva bila matrica* $m \times n$, *broj njenih linearno nezavisnih vrsta jednak je broju njenih linearno nezavisnih kolona.*

4.5. EKVIVALENTNE MATRICE

Definicija 1. *Pod elementarnim transformacijama jedne matrice smatraju se operacije:*

1° *Razmena dve vrste (odnosno dve kolone);*

2° *Dodavanje elementima jedne vrste (odnosno kolone) elemenata neke druge vrste (odnosno kolone), pošto su prethodno ovi poslednji pomnoženi proizvoljnim brojem;*

3° *Množenje elemenata jedne vrste (odnosno kolone) nekim brojem različitim od nule.*

Definicija 2. *Za dve matrice koje se mogu transformisati jedna u drugu konačnim brojem elementarnih transformacija kaže se da su ekvivalentne.*

Ako su dve matrice A i B ekvivalentne, to se označava $A \cong B$. Iz ove relacije ne sleduje $A = B$ niti $\det A = \det B$.

Stav 1. *Ekvivalentne matrice imaju isti rang.*

Dokaz. Neka su A i B dve ekvivalentne matrice, takve da se B dobija iz A primenom samo jedne elementarne transformacije. Ako dokažemo da se u ovom slučaju ne menja rang matrice, stav je dokazan.

Ranije smo dokazali (stav 2 u 4.1) da se razmenom vrsta (kolona) ne menja rang matrice.

Da bismo dokazali da se rang matrice ne menja ako se elementima jedne kolone dodaju elementi neke druge kolone pošto su prethodno ovi drugi pomnoženi proizvoljnim brojem, posmatrajmo sistem linearnih formi

$$(1) \qquad f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=1, \ldots, m),$$

čija je matrica A.

Pretpostavimo da su elementima ν-te kolone matrice A dodati odgovarajući elementi N-te kolone, pošto su prethodno ovi poslednji pomnoženi faktorom λ. Tada se dobija nova matrica

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu} + \lambda a_{1N} & \ldots & a_{1N} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{m\nu} + \lambda a_{mN} & & a_{mN} & & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Ovoj matrici odgovara sistem linearnih formi

$$g_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + (a_{1\nu} + \lambda a_{1N}) y_\nu + \cdots + a_{1N} y_N + \cdots + a_{1n} y_n,$$
$$\vdots$$
$$g_m = a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + (a_{m\nu} + \lambda a_{mN}) y_\nu + \cdots + a_{mN} y_N + \cdots + a_{mn} y_n,$$

tj.

$$(2) \qquad \begin{aligned} g_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1\nu} y_\nu + \cdots + a_{1N} (y_N + \lambda y_\nu) + \cdots + a_{1n} y_n, \\ &\vdots \\ g_m &= a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{m\nu} y_\nu + \cdots + a_{mN} (y_N + \lambda y_\nu) + \cdots + a_{mn} y_n. \end{aligned}$$

Broj nezavisnih formi u skupu linearnih formi (1) jednak je broju nezavisnih formi u skupu formi (2), jer skupu formi (1) po promenljivima

$$x_1, \ldots, x_\nu, \ldots, x_N, \ldots, x_n,$$

kao i skupu formi (2) po promenljivima

$$y_1, \ldots, y_\nu, \ldots, y_N + \lambda y_n, \ldots, y_n,$$

odgovara ista matrica.

Obrnuto takođe važi, tj. matrici A odgovaraju skupovi formi (1) i (2).

Prema tome, rang matrice ne menja se navedenom elementarnom transformacijom.

Najzad, pretpostavimo da je matrica B dobijena iz matrice A množenjem i-te vrste konstantom c $(c \neq 0)$. Ako je $\operatorname{rang} A = r$, postoji minor matrice A reda r koji je različit od nule. Odgovarajući minor matrice B jednak je tom minoru matrice A ukoliko ne sadrži elemente i-te vrste, odnosno jednak je proizvodu tog minora i konstante c ako sadrži elemente i-te vrste. U oba slučaja on je, dakle, različit od nule. Stoga je $\operatorname{rang} B \leqq \operatorname{rang} A$. Kako se matrica A dobija iz matrice B množenjem i-te vrste sa $\frac{1}{c}$ $(\neq 0)$, važi nejednakost $\operatorname{rang} A \leqq \operatorname{rang} B$, pa je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Slično se dokazuje da se rang matrice ne menja ako se jedna njena kolona pomnoži konstantom.

4.6. PRAKTIČNO ODREĐIVANJE RANGA MATRICE

Definicija 1. *Pod dijagonalnom formom matrice tipa $m\times n$ smatra se matrica oblika*

$$B=\left\|\begin{array}{cccc|c} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & d_2 & & 0 & O \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & d_r & \\ \hline & & O & & O \end{array}\right\| \qquad (0\leq r\leq \min(m,n)),$$

gde je $d_1\cdots d_r\neq 0$.

Stav 1. *Svaka matrica A elementarnim transformacijama može se svesti na ekvivalentnu matricu koja ima dijagonalnu formu B. Takođe može se udesiti da svako d_k $(k=1,\ldots,r)$ bude 1.*

Dokaz. Posmatrajmo matricu $A=\|a_{ik}\|_{m,n}$ i pretpostavimo da svi njeni elementi a_{ik} $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$ nisu nule. Ako bi svi elementi bili nule, matrica A bi bila dijagonalna, gde je $r=0$.

Pretpostavimo da je bar jedan element matrice A različit od nule i neka je to a_{11}. Ako ovo poslednje nije slučaj, razmenom vrsta i kolona može se učiniti da element na mestu $(1,1)$ bude različit od nule.

Kada elemente prve vrste matrice A pomnožimo sa $\dfrac{1}{a_{11}}$, dobijamo matricu

$$\begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Ako elementima kolone $k\,(>1)$ dodamo elemente prve kolone poslednje matrice, pošto ih prethodno pomnožimo sa $-\dfrac{a_{1k}}{a_{11}}$, dobijamo matricu oblika[1]

$$\begin{Vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & 0 & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2k} & & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & & b_{mk} & & b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Primenjujući uzastopno ovaj postupak za $k=2,3,\ldots,n$, nalazimo

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mn} \end{Vmatrix}.$$

[1] Zbog simetrije svi elementi označeni su sa b_{ik} bez obzira na to što neki nisu izmenjeni. Tako je postupljeno i dalje.

Na sličan način dobijamo matricu

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & d_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & d_{m2} & & d_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Ako pretpostavimo[1] da je $d_{22}\neq 0$ i primenimo na matricu

$$\begin{Vmatrix} d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ d_{32} & & d_{3n} \\ \vdots & & \\ d_{m2} & & d_{mn} \end{Vmatrix}$$

isti postupak koji smo primenili na matrici A, dobijamo

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} & & e_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & e_{m3} & & e_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Ovaj postupak produžavamo sve dotle, dok matrica ne postane dijagonalna.

Sve su ove matrice ekvivalentne.

Za određivanje ranga matrice važi sledeći stav koji bez dokaza navodimo.

Stav 2. *Ako je jedna submatrica A_r reda $r\leq\min(m,n)$ matrice A tipa $m\times n$ regularna, a sve submatrice reda $r+1$ matrice A koje sadrže A_r kao submatricu su singularne, tada je r rang matrice A.*

Prilikom primene ovog stava polazi se od submatrica nižeg reda ka submatricama višeg reda.

Primer 1. U ovom primeru pokazaćemo kako se određuje rang matrice svođenjem na dijagonalnu formu:

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{(razmena prve i druge kolone prethodne matrice)}$$

$$\cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \quad \left(\text{posle množenja elemenata prve vrste prethodne matrice sa } \frac{1}{2}\right)$$

[1] Ako su svi elementi d_{ik} nula, matrica A je svedena na dijagonalnu formu i njen je rang $r=1$. Ako to nije slučaj, bar jedan element je $\neq 0$.

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

(elementima treće kolone dodati su elementi prve kolone pomnoženi sa 2)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

(elementi druge vrste pomnoženi su sa −1)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

(elementima druge vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa −4; elementima treće vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa −1; elementima četvrte vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa −5; elementima pete vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa −3)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(razmena četvrte i pete vrste prethodne matrice)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(posle množenja elemenata treće kolone sa $\frac{1}{3}$).

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(posle množenja elemenata treće vrste sa $\frac{1}{3}$ i elemenata četvrte vrste sa $\frac{1}{2}$)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(elementima treće vrste dodati su elementi druge vrste pomnoženi sa −1; elementima četvrte vrste dodati su elementi druge vrste pomnoženi sa −1)

$$\cong\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(elementima treće kolone dodati su elementi druge kolone pomnoženi sa −1).

Rang poslednje matrice je 2. Prema tome, rang $A=2$.

Bez teškoće se dokazuje sledeći rezultat:

Stav 2. *Svaka kvadratna matrica može se svesti, konačnim brojem elementarnih transformacija, na jednu trougaonu matricu.*

Postupak svođenja matrice na trougaonu matricu, u stvari, je ekvivalentan postupku koji se koristi kod Gaussovog algoritma za svođenje linearnog sistema jednačina na trougaoni oblik.

Stav 2 može biti primenjen za određivanje ranga kvadratne matrice. Primetimo da svođenje na trougaonu matricu zahteva manje operacija nego svođenje na dijagonalnu matricu, pa je stoga ovaj postupak za određivanje ranga matrice ekonomičniji.

Primer 2. Primenom elementarnih transformacija dobijamo

$$A=\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & 11 & 4 & 8 & -11 & 2 \\ -2 & 2 & 10 & 17 & -11 & 2 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 26 & -22 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Dakle, rang $A=4$.

4.7. KRONECKER-CAPELLIEV STAV

Definicija 1. *Za sistem od m linearnih jednačina po n nepoznatih $x_1, \ldots, x_n$*

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=h_1,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n&=h_m \end{aligned}$$

kaže se da je saglasan (kompatibilan) ako postoji bar jedan skup vrednosti

$$(2)\qquad x_1=\xi_1, \ldots, x_n=\xi_n$$

za koje je

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi_1+\cdots+a_{1n}\xi_n&=h_1,\\ &\vdots\\ a_{m1}\xi_1+\cdots+a_{mn}\xi_n&=h_m. \end{aligned}$$

Uređena n-torka $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ zove se rešenje sistema linearnih jednačina (1).

Označimo sa

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & h_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & h_m \end{Vmatrix}$$

matricu sistema (1) i proširenu matricu ovoga sistema.

Za sistem jednačina (1) važi značajni Kronecker-Capelliev stav koji glasi:

Stav 1. *Sistem linearnih jednačina* (1) *saglasan je ako i samo ako je*

(4) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$

Dokaz. Ako je sistem jednačina (1) saglasan, tj. ako postoji skup vrednosti (2) takav da važi (3), dokazaćemo da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Ako na matricu B primenimo elementarne transformacije, dobijamo novu matricu

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\xi_k \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & h_m - \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\xi_k \end{Vmatrix},$$

gde smo poslednju kolonu obrazovali na taj način što smo poslednjoj koloni matrice B dodali elemente prve kolone pomnožene sa $-\xi_1, \ldots,$ elemente n-te kolone pomnožene $-\xi_n$.

Kako su svi elementi $(n+1)$-ve kolone u poslednjoj matrici, prema (3) jednaki nuli, odista je $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A$.

Prema tome, dokazali smo da je uslov (4) potreban. Dokažimo sada da je on i dovoljan, tj. da uslov

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A = r$$

implicira da je sistem jednačina (1) saglasan.

U ovom slučaju postoji bar jedna regularna submatrica reda r matrice A. Pretpostavimo da se ova submatrica nalazi u gornjem levom uglu.

Tada su prvih r vrsta matrice A i matrice B linearno nezavisne, dok su ostale vrste u ovim matricama linearne kombinacije od r prvih vrsta. Prema tome, u sistemu linearnih jednačina (1) mogu se odbaciti sve one jednačine za koje je $i = r+1, \ldots, m$.

Stoga ćemo razlikovati dva slučaja: 1° $r = n$; 2° $r < n$.

Ako je $r = n$, sistem jednačina (1) ima jedinstveno rešenje. To je CRAMEROV slučaj koji smo već razmatrali.

Ako je $r < n$, tada se sistemu jednačina (1) može dati oblik:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r &= h_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ &\;\vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r &= h_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina ima jedinstveno rešenje $(x_1, \ldots, x_r)$, koje zavisi od nepoznatih $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sa kojima raspolažemo po volji.

Prema tome, sistem (1), za $r < n$, ima beskonačno mnogo rešenja.

Dokazali smo, dakle,

$$(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B) \Leftrightarrow (\text{sistem jednačina (1) je saglasan}),$$

tj. stav 1.

Posmatrajmo važan partikularan slučaj kada je $m = n+1$. Matrice A i B imaju tada oblike

$$A = \|a_{ik}\| \quad (i = 1, \ldots, n+1;\ k = 1, \ldots, n),$$

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \vdots & & & \\ a_{n+1,1} & & a_{n+1,n} & h_{n+1} \end{Vmatrix}.$$

Rang matrice A najviše je jednak n.

Pretpostavimo da je u ovom slučaju sistem jednačina (1) saglasan. Tada je

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A,$$

odakle sleduje $\det B = 0$, jer je $\operatorname{rang} B \leq n$.

Obrnuto ne važi, tj. ako je $\det B = 0$, sistem linearnih jednačina o kome je reč ne mora biti saglasan.

PRIMEDBA 1. Ovaj stav nosi takođe i naziv ROUCHÉ-CAPELLIev stav, mada ga je prvi formulisao i dokazao FONTENÉ, bez upotrebe matričnog računa.

4.8. SISTEM LINEARNIH HOMOGENIH JEDNAČINA

Definicija 1. *Sistem jednačina*

(3)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

zove se homogen sistem linearnih jednačina.

Svaki homogen sistem je saglasan u smislu definicije 1 u 4.7 jer ima trivijalno rešenje $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Kao neposredna posledica KRONECKER-CAPELLIevog stava dobija se:

Stav 1. *Ako je* $r = \operatorname{rang} \|a_{ik}\|_{m,n} = n$, *tada je trivijalno rešenje jedinstveno rešenje homogenog sistema* (1).

Ako je $r < n$, *tada su proizvoljne* $n - r$ *od nepoznatih* $x_1, \ldots, x_n$ *i homogeni sistem ima, osim trivijalnog rešenja, beskonačno mnogo drugih rešenja.*

Primetimo da homogen sistem jednačina ima sledeće dve osobine koje nema nehomogen sistem jednačina:

1° Ako je $(x_1, \ldots, x_n)$ bilo koje rešenje sistema (1), tada je i $(kx_1, \ldots, kx_n)$ gde je k proizvoljan broj, takođe rešenje sistema (1);

2° Ako su $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ bilo koja dva rešenja sistema (1), tada je i $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ takođe rešenje sistema (1).

PRIMEDBA 1. Ako je dat sistem jednačina (1) takav da je $\operatorname{rang} \|a_{ik}\|_{m,n} = r < n$, nije mogućno na proizvoljan način izabrati $n - r$ od nepoznatih $x_1, \ldots, x_n$ koje će biti proizvoljne. Potrebno je da sistem jednačina (1), shvaćen kao sistem od m jednačina sa r nepoznatih, bude saglasan.

PRIMER 1. Za sistem jednačina

(1)
$$x + 7y + 17z + 3t = 0,\quad 4y + 10z + t = 0,\quad 3x + y + z + 4t = 0,\quad 2x + 2y + 4z + 3t = 0,$$

matrica sistema glasi

$$A=\begin{Vmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\3&1&1&4\\2&2&4&3\end{Vmatrix}\cong\begin{Vmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&-20&-50&-5\\0&-12&-30&-3\end{Vmatrix}\cong\begin{Vmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Dakle, rang $A=2$.

Nepoznate z i t možemo izabrati proizvoljno, a nepoznate x i y odrediti iz sistema jednačina

$$x+7y+17z+3t=0,\quad 4y+10z+t=0.$$

Prema tome rešenje sistema (1) je $\left(\frac{1}{2}z-\frac{5}{4}t,\ -\frac{5}{2}z-\frac{1}{4}t,\ z,\ t\right)$.

4.9. SLABO USLOVLJENI SISTEMI I SLABO USLOVLJENE MATRICE

Do rešenja sistema linearnih jednačina može se doći primenom: 1° tačnih metoda, 2° približnih metoda.

Tačne metode su one koje omogućavaju da se pomoću konačnog broja osnovnih aritmetičkih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje) dođe do rešenja datog sistema. Takvi su svi metodi koje smo do sada izložili (CRAMERovo pravilo, GAUSSov algoritam, rešavanje primenom inverznih matrica).

Najvećih broj približnih metoda sastoji se u tome da se polazeći od jednog približnog rešenja formira niz približnih rešenja koji konvergira ka tačnom rešenju posmatranog sistema.

Često je pri rešavanju sistema jednačina potrebno vršiti izvesna zaokruživanja koeficijenata, što dovodi do odstupanja dobijenog rešenja od stvarnog rešenja. Ova zaokružavanja naročito dolaze do izražaja kod numeričkog rešavanja sistema pomoću računskih mašina. Zaokruživanja koeficijenata često neće dovesti do velikih promena u rešenjima. Međutim, ima sistema kod kojih male promene u koeficijentima dovode do velikih promena u rešenju. Ovakvi sistemi nazivaju se *slabo uslovljeni*.

Daćemo jedan jednostavan primer: Rešenje sistema jednačina

(1) $\quad x+y=1,\quad x+1.01\,y=2,$

je $x=-99,\ y=100$.

Rešenje ovog sistema je veoma osetljivo na male promene koeficijenta uz y u drugoj jednačini. Tako, na primer, uzimajući 0.99 umesto 1.01 dobijamo rešenje $x=101,\ y=-100$. Ovo znači da je promena koeficijenta uz y u drugoj jednačini za 2% dovela do promene u rešenju za y za 200%, a za x i preko 200%.

Primetimo da se sistem (1) može zameniti ekvivalentnim sistemom koji nije toliko osetljiv na promene koeficijenata, tj. jednim dobro uslovljenim sistemom. Tako, na primer, ako najpre pomnožimo prvu jednačinu sistema (1) sa -97, a drugu sa 100 i saberemo, a zatim pomnožimo prvu jednačinu sa -700, a drugu sa 704 i saberemo, dobijamo ekvivalentan sistem sistemu (1):

$$3x+4y=103,\quad 4x-3y=-696.$$

Bez teškoće se proverava da promena bilo koga koeficijenta za 2% dovodi do znatno manjih promena u rešenjima nego što je to bio slučaj za sistem (1).

U vezi sa slabo uslovljenim sistemima su i sledeći pojmovi:

Definicija 1. *Inverzna matrica A^{-1} matrice A je stabilna ako malim promenama elemenata matrice A odgovaraju male promene elemenata matrice A^{-1}. U protivnom matrica A^{-1} je nestabilna.*

Definicija 2. *Matrica A je slabo uslovljena ako je njena inverzna matrica A^{-1} nestabilna.*

Ako je sistem linearnih jednačina dat u matričnom obliku

(2) $\quad AX=B,$

njegovo rešenje, u slučaju kada je A regularna matrica, dato je sa

$$X=A^{-1}B.$$

Prema tome, sistem (2) biće osetljiv na male promene koeficijenata (tj. elemenata matrice A) ako je matrica A slabo uslovljena.

PRIMEDBA 1. U primenjenoj matematici slabo uslovljeni sistemi igraju važnu ulogu. Postoji niz kriterijuma sa ispitivanje stabilnosti matrica, odnosno za ispitivanje slabe uslovljenosti sistema linearnih jednačina. Interesantan je članak:

N. S. MENDELSON: *Some elementary properties of ill conditioned matrices and linear equations*. Amer. Math. Monthly 63 (1956), 285—295.

Iz ovog članka je uzet gornji primer.

Zadaci za rešavanje

M I, Matrice i determinante: 4.20, 5.2, 5.3, 5.13, 5.16, 5.19, 5.20.

POLINOMI

1. OSOBINE POLINOMA
2. REŠAVANJE ALGEBARSKIH NUMERIČKIH JEDNAČINA
3. INTERPOLACIJA
4. RACIONALNE FUNKCIJE

1. OSOBINE POLINOMA

1.1. DEFINICIJE

Definicija 1. *Polinom P po kompleksnoj promenljivoj $z = x + iy$ definiše se sa*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k z^{n-k},$$

gde je n prirodan broj ili nula i $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi.

Definicija 2. *Ako je $a_0 \neq 0$, broj n zove se stepen polinoma P i kaže se da je P polinom stepena n po z.*

Broj 0 smatra se kao polinom neodređenog stepena i naziva se nula-polinom.

Za stepen n polinoma P koristi se oznaka $n = \mathrm{dg} P$.

Ako su P i Q polinomi, tada je

$$\mathrm{dg}(P+Q) \leq \max(\mathrm{dg} P, \mathrm{dg} Q).$$

Ako su P i Q polinomi takvi da $P \not\equiv 0$ i $Q \not\equiv 0$, tada je $PQ \not\equiv 0$ i

$$\mathrm{dg}(PQ) = \mathrm{dg} P + \mathrm{dg} Q.$$

U skladu sa tradicijom označavanja u daljem tekstu o polinomima neće biti pravljena razlika između oznaka P i $P(z)$.

Definicija 3. *$a_0 z^n, a_1 z^{n-1}, \ldots, a_{n-1} z, a_n$ zovu su članovi polinoma, od kojih je $a_0 z^n$ najstariji (vodeći) član i a_n nezavisan član.*

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ zovu se koeficijenti polinoma od kojih je a_0 najstariji (vodeći) koeficijent.

Definicija 4. *Za polinom $P_n(z)$ kaže se da je realan ako su svi njegovi koeficijenti realni brojevi.*

1.2. NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DELILAC

Osobinu da je polinom $P(z)$ deljiv polinomom $Q(z)$ (bez ostatka), tj. da je $Q(z)$ delilac polinoma $P(z)$, označavaćemo $Q(z) | P(z)$.

Definicija 1. *Ako su $P(z)$ i $Q(z)$ dva polinoma i ako je $R(z) | P(z)$ i $R(z) | Q(z)$, kažemo da je $R(z)$ zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$.*

Definicija 2. *Polinom $d(z)$ je najveći zajednički delilac, u oznaci NZD, polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ ako je $d(z) | P(z)$ i $d(z) | Q(z)$ i ako je svaki zajednički delilac $R(z)$ polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ takođe delilac i polinoma $d(z)$.*

Primetimo da ako je $d(z)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ tada je $\alpha d(z)$ $(\alpha \neq 0, \alpha \in C)$ takođe NZD tih polinoma.

O egzistenciji NZD govori sledeći stav:

Stav 1. *Za bilo koja dva ne-nula polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ postoji NZD. On je jedinstven sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante.*

Dokaz. Neka je $n = \mathrm{dg} P(z)$, $m = \mathrm{dg} Q(z)$ $(n \geq m)$. Primenićemo EUKLIDOV algoritam.

Pri deljenju polinoma $P(z)$ sa $Q(z)$ dobijamo količnik $Q_1(z)$ sa ostatkom $R_1(z)$. Ako je $R_1(z) = 0$, tada je $Q(z)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$. Ako je $R(z) \neq 0$, tada delimo $Q(z)$ sa $R_1(z)$. Neka je količnik $Q_2(z)$ sa ostatkom $R_2(z)$. Produžimo li ovaj postupak, najzad nailazimo na ostatak $R_k(z)$ koji se sadrži u prethodnom ostatku $R_{k-1}(z)$.

U stvari dobijamo niz identiteta:

$$
\begin{aligned}
P(z) &= Q(z)\,Q_1(z) + R_1(z),\\
Q(z) &= R_1(z)\,Q_2(z) + R_2(z),\\
R_1(z) &= R_2(z)\,Q_3(z) + R_3(z),\\
&\vdots\\
R_{k-3}(z) &= R_{k-2}(z)\,Q_{k-1}(z) + R_{k-1}(z),\\
R_{k-2}(z) &= R_{k-1}(z)\,Q_k(z) + R_k(z),\\
R_{k-1}(z) &= R_k(z)\,Q_{k+1}(z).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dokazaćemo da je $R_k(z)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$. Iz poslednja dva identiteta u (1) izlazi

$$
\begin{aligned}
R_{k-2}(z) &= R_k(z)\,Q_{k+1}(z)\,Q_k(z) + R_k(z)\\
&= R_k(z)\big(Q_{k+1}(z)\,Q_k(z) + 1\big),
\end{aligned}
$$

tj.

$$R_k(z) | R_{k-2}(z).$$

Iz identiteta

$$R_{k-3}(z) = R_{k-2}(z)\,Q_{k-1}(z) + R_{k-1}(z)$$

sleduje $R_k(z) | R_{k-3}(z)$, jer je

$$R_k(z) | R_{k-1}(z) \quad \text{i} \quad R_k(z) | R_{k-2}(z).$$

Dalje se dobija

$$R_k(z) | R_{k-4}(z), \quad R_k(z) | R_{k-5}(z), \ \ldots, \ R_k(z) | Q(z), \quad R_k(z) | P(z).$$

Ovim smo dokazali da je $R_k(z)$ zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$.

Dokažimo sada da je $R_k(z)$ i najveći zajednički delilac. Neka je $\rho(z)$ delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$. Tada iz (1), jedno za drugim, dobijamo

$$\rho(z) | R_1(z), \quad \rho(z) | R_2(z), \ \ldots, \ \rho(z) | R_k(z).$$

Prema tome, svaki delilac $\rho(z)$ polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ je istovremeno delilac i polinoma $R_k(z)$, pa je, na osnovu definicije 2, $R_k(z)$ najveći delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$.

Dokažimo najzad da je najveći zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ jedinstven sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante. Neka su $d_1(z)$ i $d_2(z)$ dva najveća zajednička delioca polinoma $P(z)$ i $Q(z)$. Tada mora biti $d_1(z) \mid d_2(z)$ i $d_2(z) \mid d_1(z)$, a to je mogućno ako i samo ako je $d_1(z) = C d_2(z)$ $(C = \text{const})$.

PRIMER 1. Primenimo navedeni algoritam na polinome

$$P(z) = z^4 + z^3 - 2z - 2, \qquad Q(z) = 2z^3 + z^2 + 1.$$

Umesto $P(z)$ uzimamo $2P(z)$, pa je

$$\begin{array}{l} (2z^4 + 2z^3 \qquad -4z - 4) : (2z^3 + z^2 + 1) \,\Big|\, z + \dfrac{1}{2} = Q_1(z) \\ \underline{2z^4 + z^3 \qquad + z} \\ \qquad z^3 \qquad -5z - 4 \\ \qquad \underline{z^3 + \dfrac{1}{2}z^2 \qquad + \dfrac{1}{2}} \\ \qquad -\dfrac{1}{2}z^2 - 5z - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{1}{2}(z^2 + 10z + 9). \end{array}$$

Da smo pre deljenja polinoma

$$z^3 - 5z - 4 \text{ polinomom } 2z^3 + z^2 + 1$$

pomnožili prvi od ovih polinoma sa 2, bilo bi

$$\begin{array}{l} (2z^3 \quad -10z - 8) : (2z^3 + z^2 + 1) \mid 1 \\ \underline{2z^3 + z^2 \qquad + 1} \\ \quad -z^2 - 10z - 9. \end{array}$$

Dakle, dobijamo ostatak kao ranije, pomnožen sa 2. Kako je NZD dat sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante, da bi se uprostio EUKLIDOV algoritam, možemo u toku računa množiti jednim numeričkim faktorom $\alpha\,(\neq 0)$ bilo delilac, bilo deljenik, bilo delimični deljenik.

Sada treba podeliti polinom

$$2z^3 + z^2 + 1 \quad \text{sa} \quad -\frac{1}{2}(z^2 + 10z + 9),$$

ili bolje sa $z^2 + 10z + 9$. Tako dobijamo

$$\begin{array}{l} (2z^3 + \quad z^2 \qquad + \quad 1) : (z^2 + 10z + 9) \mid 2z - 19 \\ \underline{2z^3 + 20z^2 + \ 18z} \\ \quad -19z^2 - \ 18z + \ 1 \\ \quad \underline{-19z^2 - 190z - 171} \\ \qquad\qquad 172z + 172 = 172(z+1). \end{array}$$

Zatim treba podeliti

$$z^2 + 10z + 9 \text{ sa } 172z + 172, \text{ ili bolje sa } z + 1.$$

Ovim završavamo, jer je

$$(z^2 + 10z + 9) : (z + 1) = z + 9.$$

Prema tome, $z + 1$ je najveći zajednički delilac datih polinoma.

1.3. OSNOVNI STAV ALGEBRE

Pod algebarskom jednačinom po z podrazumeva se jednačina

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Polinom $P(z)$ zove se polinom jednačine.

Pod nulom ili korenom polinoma $P(z)$ podrazumeva se takav kompleksan broj z_0 za koji je ispunjeno $P(z_0) = 0$.

Pod rešenjem ili korenom jednačine $P(z) = 0$ smatra se svaka nula polinoma $P(z)$.

Stav 1. *Svaki polinom stepena $n\,(\geq 1)$ ima bar jednu nulu, realnu ili imaginarnu.*

To je osnovni stav algebre. Dokaz ovog stava nećemo ovde navoditi. Postoje razni dokazi ovog stava od kojih je samo GAUSS dao četiri (1799, 1815, 1816, 1849. godine).

Jedan dokaz ovog stava može se naći, na primer, u knjizi:

D. S. MITRINOVIĆ: *Kompleksna analiza*, četvrto izdanje. Beograd 1977, str. 171—172.

1.4. FAKTORIZACIJA POLINOMA

Definicija 1. *Ako je z_1 nula polinoma*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

razlika $z - z_1$ zove se koreni činilac ili linearni faktor polinoma $P_n(z)$.

Stav 1. *Svaki polinom $P_n(z)$ deljiv je svakim od svojih korenih činilaca.*

Dokaz. Posmatrajmo polinom $P_n(z) - P_n(z_1)$, koji se može predstaviti u obliku

(1) $$P_n(z) - P_n(z_1) = a_0(z^n - z_1^n) + a_1(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(z - z_1) = (z - z_1) P_{n-1}(z),$$

pri čemu je P_{n-1} polinom stepena $n-1$ oblika

$$P_{n-1}(z) = a_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1},$$

gde su $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$ funkcije od $z_1, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Po osnovnom stavu algebre (stav 1 u 1.3) svaki polinom ima bar jednu nulu. Ako je ta nula z_1, tj. ako je $P_n(z_1) = 0$, iz (1) sleduje

$$P_n(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z).$$

Ovim je stav 1 dokazan.

Stav 2. *Za svaki polinom P_n, definisan sa*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

postoje kompleksni brojevi $z_1, \ldots, z_n$ takvi da je

(2) $$P_n(z) = a_0 (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Dokaz. Ako je z_1 nula polinoma $P_n(z)$, dokazali smo da je

$$P_n(z)=(z-z_1)\,P_{n-1}(z).$$

Polinom $P_{n-1}(z)$, prema osnovnom stavu algebre (stav 1 u 1.3), ima takođe bar jednu nulu, recimo z_2, pa je

$$P_{n-1}(z)=(z-z_2)\,P_{n-2}(z),$$

gde je $P_{n-2}(z)$ polinom stepena $n-2$ oblika

$$P_{n-2}(z)=a_0 z^{n-2}+c_1 z^{n-3}+\cdots+c_{n-3}z+c_{n-2}$$

gde su $c_1, \ldots, c_{n-2}$ funkcije od z_2, a_0, $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Produžujući ovaj postupak na kraju dobijamo

$$P_2(z)=a_0 z^2+l_1 z+l_2,\quad \text{tj.}\quad P_2(z)=(z-z_{n-1})\,P_1(z),$$

gde je

$$P_1(z)=a_0 z+m_1=a_0(z-z_n).$$

Prema tome, na osnovu osnovnog stava algebre, može se obrazovati sledeći niz identiteta:

$$\begin{aligned} P_n(z) &=(z-z_1)\,P_{n-1}(z),\\ P_{n-1}(z) &=(z-z_2)\,P_{n-2}(z),\\ &\;\vdots\\ P_2(z) &=(z-z_{n-1})\,P_1(z),\\ P_1(z) &=a_0(z-z_n). \end{aligned}$$

Ako pomnožimo odgovarajuće strane ovih jednakosti dobijamo (2), pa je stav 2 dokazan.

Ako je z_1 nula polinoma $P_n(z)$, dokazali smo da važi jednakost

$$P_n(z)=(z-z_1)\,P_{n-1}(z).$$

Ako z_1 nije nula polinoma $P_{n-1}(z)$, kaže se da je z_1 nula *prvog reda* polinoma $P_n(z)$.

Ako je z_1 nula polinoma $P_{n-1}(z)$, tada je

$$P_{n-1}(z)=(z-z_1)\,P_{n-2}(z).$$

Ako z_1 nije nula polinoma $P_{n-2}(z)$, kaže se da je z_1 nula *drugog reda* polinoma $P_n(z)$.

Pretpostavimo sada da je z_1 nula polinoma:

$$P_n(z),\ P_{n-1}(z),\ \ldots,\ P_{n-k+1}(z)\qquad (k\leqq n),$$

a da nije nula polinoma $P_{n-k}(z)$. Tada se kaže da je z_1 nula *reda k* polinoma $P_n(z)$ i ovaj polinom može se predstaviti u obliku

$$P_n(z)=(z-z_1)^k\,P_{n-k}(z),$$

gde je $P_{n-k}(z_1)\neq 0$.

Za nulu reda $k>1$ kaže se takođe da je *višestruka*, a za nulu reda $k=1$ da je *jednostruka* ili *prosta*.

Stav 3. *Polinom stepena n ne može se anulirati za više od n različitih vrednosti.*

Dokaz. Pretpostavimo da se polinom

$$P(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\qquad (a_0\neq 0)$$

anulira za svaki element skupa $S=\{t_1, \ldots, t_{n+1}\}$, tj. da se anulira za više od n vrednosti.

Na osnovu stava 2 postoje kompleksni brojevi $z_1, \ldots, z_n$ takvi da je

$$P(z)=a_0(z-z_1)\cdots(z-z_n).$$

Kako je $P(t_1)=0$, zaključujemo da je $t_1=z_i$ $(1\leqq i\leqq n)$. Prema tome $t_1\in S_1=\{z_1, \ldots, z_n\}$. Analogno se dokazuje da je za svako $i\,(1\leqq i\leqq n)$, $t_i\in S_1$, pa je $S\subset S_1$. Ovo bi značilo da je $n+1\leqq n$, što je nemogućno.

Definicija 2. *Kaže se da je polinom $P(z)$ identički jednak nuli ako dobija vrednost nule za svako z.*

Stav 4. *Potreban i dovoljan uslov da polinom $P(z)$ bude identički jednak nuli je da svi njegovi koeficijenti budu jednaki nuli.*

Dokaz. Posmatrajmo polinom P definisan sa

$$P(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_k z^{n-k}+\cdots+a_n.$$

Ako je $a_k=0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ tada je $P(z)\equiv 0$. Pretpostavimo da to ne važi i neka je u nizu

$$a_0,\ a_1, \ldots,\ a_k, \ldots,\ a_n\qquad (k<n)$$

koeficijent a_k prvi koji je različit od nule. Tada polinom $P(z)$ postaje

$$a_k z^{n-k}+a_{k+1}z^{n-k+1}+\cdots+a_n.$$

Na osnovu stava 3 ovaj polinom može se anulirati za najviše $n-k$ različitih vrednosti. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da se $P(z)$ anulira za svako z. Prema tome, stav 4 je dokazan.

Definicija 3. *Kaže se da su polinomi $P(z)$ i $Q(z)$ identički jednaki ako dobijaju jednake vrednosti za svako z.*

Stav 5. *Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P(z)$ i $Q(z)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki.*

Dokaz. Uslov je *dovoljan.* Ako su koeficijenti odgovarajućih članova[1] polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ jednaki, tada su $P(z)$ i $Q(z)$ dva istovetna polinoma, te oni dobijaju jednake vrednosti za svako z.

Uslov je *potreban.* Pretpostavimo da su polinomi

$$\begin{aligned} P(z)&=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0,\\ Q(z)&=b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0, \end{aligned}$$

identički jednaki, tj. da je

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0\equiv b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0.$$

Ako je $m\geqq n$, poslednji identitet može se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} &b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_{n+1}z^{n+1}\\ &\quad+(b_n-a_n)z^n+(b_{n-1}-a_{n-1})z^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1)z+(b_0-a_0)\equiv 0. \end{aligned}$$

[1] Za izraze oblika az^p, bz^p (p nula ili prirodan broj; a, b ma kakve konstante) kaže se da su odgovarajući članovi polinoma.

Na osnovu stava 1 odavde izlazi

$$b_m=0,\ b_{m-1}=0,\ \ldots,\ b_{n+1}=0,\ b_n=a_n,\ b_{n-1}=a_{n-1},\ \ldots,\ b_1=a_1,\ b_0=a_0.$$

Iz pretpostavke da su polinomi $P(z)$ i $Q(z)$ identički jednaki dobili smo da su koeficijenti njihovih odgovarajućih članova jednaki.

Ovim smo dokazali navedeni stav.

PRIMER 1. Posmatrajmo identitet

$$(1+z)^m(1+z)^n=(1+z)^{m+n} \qquad (m,\ n \text{ prirodni brojevi}),$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z^k\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}z^\nu=\sum_{r=0}^{m+n}\binom{m+n}{r}z^r.$$

Odavde se na osnovu stava 5 dobija

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}.$$

Na neposrednoj primeni stava o identičnosti polinoma (stav 5) zasnovan je metod neodređenih koeficijenata koji ima veliki praktični značaj. Ovaj metod ćemo objasniti na primerima.

PRIMER 2. Predstavimo polinom z^3-3z^2+4z+1 u obliku polinoma po $z-1$, tj. u obliku

$$z^3-3z^2+4z+1=A_0+A_1(z-1)+A_2(z-1)^2+A_3(z-1)^3,$$

gde su $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ privremeno neodređeni koeficijenti.

Primenimo li dokazani stav dobijamo četiri linearne jednačine, iz kojih se nalazi

$$A_3=1,\quad A_2=0,\quad A_1=1,\quad A_0=3.$$

PRIMER 3. Odredimo a i b tako da polinom

$$z^4+az^3+bz^2-8z+4$$

ima dve nule drugog reda.

Dati polinom biće oblika $(z^2+pz+q)^2$, gde su p i q dva privremeno neodređena koeficijenta. Koeficijente $a,\ b,\ p,\ q$ naći ćemo polazeći od identiteta

$$z^4+az^3+bz^2-8z+4=(z^2+pz+q)^2.$$

Nije teško dokazati da su traženi polinomi

$$z^4-4z^3+8z^2-8z+4=(z^2-2z+2)^2,$$

$$z^4+4z^3-8z+4=(z^2+2z-2)^2.$$

Dvostruke nule su $z_{1,2}=1\pm i$, odnosno $z_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$.

Stav 6. *Svaki polinom $P(z)$ stepena n može se, na jedinstven način, predstaviti u obliku*

(3) $\qquad P(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_r)^{k_r},$

gde su svi $z_1,\ldots,z_r$ različiti brojevi, $k_1,\ldots,k_r$ prirodni brojevi takvi da je $k_1+\cdots+k_r=n$ i a_0 najstariji koeficijent polinoma P.

Dokaz. Pretpostavimo da se polinom $P(z)$ može predstaviti na neki drugi način, na primer, u obliku

(4) $\qquad P(z)=A(z-t_1)^{m_1}(z-t_2)^{m_2}\cdots(z-t_s)^{m_s},$

gde su svi $t_1,\ldots,t_s$ različiti brojevi i $m_1,\ldots,m_s$ prirodni brojevi takvi da je $m_1+\cdots+m_s=n$.

Razvijajući i upoređujući izraze koji se javljaju na desnim stranama u (3) i (4), dobijamo $a_0=A$.

Na osnovu (3) i (4) zaključujemo da mora važiti identitet

(5) $\qquad (z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_r)^{k_r}=(z-t_1)^{m_1}\cdots(z-t_s)^{m_s}.$

Iz (3) dobijamo $P(z_1)=0$. Prema (5) zaključujemo da mora postojati $t_i\,(1\leqq i\leqq s)$ tako da važi $z_1=t_i$. Slično važi i za $z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_r$. Prema tome, ako stavimo $S_1=\{z_1,\ \ldots,\ z_r\}$, $S_2=\{t_1,\ \ldots,\ t_s\}$ imamo $S_1\subset S_2$. Na isti način, polazeći od (5), zaključuje se da je $S_2\subset S_1$, pa je stoga $S_1=S_2$. Prema tome je $r=s$, pa možemo uzeti $z_i=t_i\,(i=1,\ \ldots,\ r)$.

Pretpostavimo sada da je $k_1\leqq m_1$. Tada iz (5) dobijamo

(6) $\qquad (z-z_2)^{k_2}(z-z_3)^{k_3}\cdots(z-z_r)^{k_r}=(z-t_1)^{m_1-k_1}(z-t_2)^{m_2}\cdots(z-t_s)^{m_s}.$

Kako t_1 nije nula polinoma na levoj strani identiteta (6), t_1 ne može biti nula ni polinoma na desnoj strani, pa je $m_1=k_1$. Analogno se dokazuje da je $k_2=m_2,\ \ldots,\ k_r=m_r$.

Stav 7. *Svaki polinom $P(z)$ stepena n može se, na jedinstven način, predstaviti u obliku*

(7) $\qquad P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k p_k(z),$

gde su a_k kompleksni brojevi, $a_n\neq 0$ i $p_k(z)$ dati polinom stepena k.

Dokaz. Ovaj stav je tačan za konstante, tj. za polinome nultog stepena. Pretpostavimo da je stav tačan za sve polinome stepena manjeg od n. Kako su oba polinoma $P(z)$ i $p_n(z)$ stepena n, uvek možemo izabrati konstantu a_n tako da $P(z)-a_np_n(z)$ bude polinom stepena manjeg od n. Primetimo da mora biti $a_n\neq 0$. Na osnovu pretpostavke polinom $P(z)-a_np_n(z)$ se može predstaviti u obliku

$$P(z)-a_np_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kp_k(z),$$

odakle sleduje (7).

Još treba dokazati jedinstvenost razlaganja (7). Pretpostavimo da pored razlaganja (7) važi i razlaganje

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}b_kp_k(z),$$

gde su b_k realni brojevi i $b_n\neq 0$.

Tada bi bilo

(8) $\qquad \sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)p_k(z)=0.$

Kako je $p_n(z)$ polinom stepena n i $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-b_k)p_k(z)$ polinom stepena manjeg od n, iz (8) sleduje da je $a_n=b_n$. Jednakost (8) se svodi na

(9) $\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(a_k-b_k)p_k(z)=0.$

Kako je $p_{n-1}(z)$ polinom stepena $n-1$ i $\sum_{k=0}^{n-2}(a_k-b_k)p_k(z)$ polinom stepena manjeg od $n-1$, iz (9) sleduje da mora biti $a_{n-1}=b_{n-1}$. Jednakost (9) se tada svodi na

$$\sum_{k=0}^{n-2}(a_k-b_k)p_k(z)=0.$$

Produžujući ovaj postupak, zaključujemo da je

$$a_{n-2}=b_{n-2},\quad a_{n-3}=b_{n-3},\ \ldots,\ a_1=b_1,\quad a_0=b_0,$$

tj. da su razvoji (7) i (8) identični. Ovim je dokaz završen.

1.5. VIÈTEOVE FORMULE

Posmatrajmo polinom

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

i predstavimo ga u obliku

$$P(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

gde su $z_1,\ \ldots,\ z_n$ nule polinoma $P(z)$.

Iz identiteta

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_kz^{n-k}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \equiv a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

prema stavu 5 iz 1.4, sleduju formule:

$$\begin{aligned}
z_1+z_2+\cdots+z_n &= -\frac{a_1}{a_0},\\
z_1z_2+z_1z_3+\cdots+z_{n-1}z_n &= \frac{a_2}{a_0},\\
z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+\cdots+z_{n-2}z_{n-1}z_n &= -\frac{a_3}{a_0},\\
&\ \vdots\\
z_1z_2\cdots z_k+\cdots+z_{n-k+1}z_{n-k+2}\cdots z_n &= (-1)^k\frac{a_k}{a_0},\\
&\ \vdots\\
z_1z_2\cdots z_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned}$$

To su VIÈTEOVE formule koje se mogu prikazati i u obliku

$$\begin{aligned}
\sum z_1 &= -\frac{a_1}{a_0},\\
\sum z_1z_2 &= \frac{a_2}{a_0},\\
\sum z_1z_2z_3 &= -\frac{a_3}{a_0},\\
&\ \vdots\\
\sum z_1\cdots z_k &= (-1)^k\frac{a_k}{a_0},\\
&\ \vdots\\
\sum z_1\cdots z_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0},
\end{aligned}$$

gde je $\sum z_1\cdots z_k$ zbir svih proizvoda obrazovanih od $z_1,\ \ldots,\ z_n$, kao faktora tako da svaki proizvod ima tačno k faktora uzetih među $z_1,\ \ldots,\ z_n$ bez ponavljanja.

$\sum z_1\cdots z_k$ zove se *osnovna ili elementarna simetrična funkcija reda k.*

PRIMER 1. Za polinom trećeg stepena $a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$ VIÈTEOVE formule glase:

$$z_1+z_2+z_3=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=\frac{a_2}{a_0},$$

$$z_1z_2z_3=-\frac{a_3}{a_0}.$$

PRIMER 2. Za polinom četvrtog stepena $a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$ VIÈTEOVE formule su:

$$z_1+z_2+z_3+z_4=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4=\frac{a_2}{a_0},$$

$$z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=-\frac{a_3}{a_0},$$

$$z_1z_2z_3z_4=\frac{a_4}{a_0}.$$

1.6. BÉZOUTOV STAV I HORNEROVA SHEMA

Stav 1 (BÉZOUTOV stav). *Ostatak deljenja polinoma $P(z)$ sa $z-z_0$ jednak je vrednosti tog polinoma za $z=z_0$.*

Dokaz. Pri deljenju polinoma

(1) $\qquad P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$

sa binomom $z-z_0$ dolazimo do identiteta

$$P(z)=(z-z_0)(b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_kz^{n-(k+1)}+b_{k+1}z^{n-(k+2)}+\cdots+b_{n-1})+R,$$

gde je R ostatak deljenja nezavisan od z i gde su $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-1}$ privremeno neodređeni koeficijenti.

Iz poslednjeg identiteta, za $z=z_0$, dobijamo $R=P(z_0)$. Ovim je stav dokazan.

Za izračunavanje koeficijenata b_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ i ostatka R praktično je upotrebiti HORNEROV postupak, koji se sastoji iz sledećeg:

Polinom $P(z)$ može se predstaviti u obliku

$$(z-z_0)(b_0 z^{n-1}+b_1 z^{n-2}+\cdots+b_k z^{n-(k+1)}+b_{k+1} z^{n-(k+2)}+\cdots+b_{n-1})+R,$$

tj.

(2) $$b_0 z^n+(b_1-z_0 b_0) z^{n-1}+\cdots+(b_{k+1}-z_0 b_k) z^{n-(k+1)}+\cdots+(-z_0 b_{n-1}+R).$$

Upoređenjem (1) i (2) dobijamo

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0,\\ b_1 &= z_0 b_0+a_1,\\ &\vdots\\ b_{k+1} &= z_0 b_k+a_{k+1},\\ &\vdots\\ b_{n-1} &= z_0 b_{n-2}+a_{n-1},\\ R &= z_0 b_{n-1}+a_n. \end{aligned}$$

To se shematski zapisuje na sledeći način:

z_0	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{k+1}	$\cdots$	a_n
	a_0	$z_0 b_0+a_1$	$z_0 b_1+a_2$		$z_0 b_k+a_{k+1}$		$z_0 b_{n-1}+a_n$
	$=b_0$	$=b_1$	$=b_2$		$=b_{k+1}$		$=R$

PRIMEDBA 1. Izračunavanje vrednosti polinoma $P(z)$ stepena n u tački z_0 primenom HORNEROVE sheme je veoma efikasno. Naime, pri primeni HORNEROVE sheme za ovo je potrebno izvršiti n množenja i n sabiranja, dok pri direktnom izračunavanju treba izvršiti $\frac{1}{2} n(n+1)$ množenja i n sabiranja.

PRIMER 1. Rezultat deljenja polinoma $15z^4-13z^3+2z-1$ sa $z-2$ dat je pregledno shemom

2	15	−13	0	2	−1
	15	17	34	70	139

Ostatak deljenja je 139, dok je delimični količnik $15z^3+17z^2+34z+70$.

PRIMER 2. Da bismo ispitali da li je 2 nula polinoma

$$P(z)=z^5-8z^4+22z^3-26z^2+21z-18,$$

obrazovaćemo HORNEROVU shemu:

2	1	−8	22	−26	21	−18
	1	−6	10	−6	9	0

Dakle, 2 je nula ovog polinoma, jer je ostatak deljenja nula.

Da bismo sada utvrdili da li je 3 nula polinoma $z^4-6z^3+10z^2-6z+9$, obrazujmo opet HORNEROVU shemu:

3	1	−6	10	−6	9
	1	−3	1	−3	0

Prema tome, 3 je nula poslednjeg polinoma.

Ispitaćemo dalje da li je 3 nula polinoma z^3-3z^2+z-3 pomoću sheme

3	1	−3	1	−3
	1	0	1	0

Odgovor je potvrdan.

Prema tome, imamo faktorizaciju

$$P(z)=(z-2)(z-3)^2(z^2+1) \quad \text{(faktorizacija u skupu R)},$$

$$=(z-2)(z-3)^2(z-i)(z+i) \quad \text{(faktorizacija u skupu C)}.$$

1.7. JEDNA PRIMENA HORNEROVE SHEME

Pomoću HORNEROVE sheme možemo polinom

$$P_n(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1} z+a_n$$

razviti po stepenima osnove $z-h$, tj. predstaviti ga u obliku

$$P_n(z)=A_0(z-h)^n+A_1(z-h)^{n-1}+\cdots+A_{n-1}(z-h)+A_n,$$

gde su $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ koeficijenti koje treba odrediti.

Uporedo sa polinomom $P_n(z)$ posmatrajmo sledeći niz polinoma:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(z) &= A_0(z-h)^{n-1}+A_1(z-h)^{n-2}+\cdots+A_{n-2}(z-h)+A_{n-1},\\ P_{n-2}(z) &= A_0(z-h)^{n-2}+A_1(z-h)^{n-3}+\cdots+A_{n-3}(z-h)+A_{n-2},\\ &\vdots\\ P_2(z) &= A_0(z-h)^2+A_1(z-h)+A_2,\\ P_1(z) &= A_0(z-h)+A_1. \end{aligned}$$

Ovako definisani polinomi $P_n(z), P_{n-1}(z), \ldots, P_2(z), P_1(z)$ imaju osobine:

1° polinom $P_k(z)$ $(k=1, \ldots, n-1)$ je delimični količnik koji se dobija pri deljenju $P_{k+1}(z)$ sa $z-h$;

2° A_k je ostatak deljenja $P_k(z)$ sa $z-h$;

3° $A_0=a_0$.

PRIMER 1. Da bismo polinom $z^5-2z^4+3z^3-4z^2+2z+5$ razvili po stepenima osnove $z-1$, primenimo HORNEROVU shemu:

1	1	−2	3	−4	2	5
	1	−1	2	−2	0	5
	1	0	2	0	0	
	1	1	3	3		
	1	2	5			
	1	3				

Dakle,

$$z^5-2z^4+3z^3-4z^2+2z+5=(z-1)^5+3(z-1)^4+5(z-1)^3+3(z-1)^2+5.$$

1.8. REŠAVANJE OPŠTIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Jednačina

(1) $$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

zove se numerička (brojna) ako svi njeni koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ imaju numeričke vrednosti.

PRIMER 1. $z^7 - 6z^6 + z^5 - z^4 + 2z^3 - z - 7 = 0.$

Ako je bar jedan od koeficijenata proizvoljan (opšti) broj, jednačina (1) je opšta algebarska jednačina.

PRIMER $z^5 + z + a = 0.$

Neka je $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ funkcija obrazovana operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i stepenovanja racionalnim brojevima, koje su izvršene konačan broj puta sa koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Algebarski rešiti, tj. rešiti pomoću radikala, jednačinu (1) znači odrediti sve funkcije F koje identički zadovoljavaju jednačinu (1), tj. odrediti takve funkcije F za koje je

$$a_0 F^n + a_1 F^{n-1} + \cdots + a_{n-1} F + a_n \equiv 0 \qquad (\forall\, a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Za opšte algebarske jednačine prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena poznata su algebarska rešenja.

Za jednačine čiji je stepen $n > 4$ ABEL je dokazao važan rezultat:

Stav 1. *U opštem slučaju algebarska jednačina* (1), *čiji je stepen* $n > 4$, *ne može se rešiti algebarski, tj. pomoću radikala.*

Za svako $n \geq 5$ mogućno je navesti primer jednačine sa celim koeficijentima čiji se koreni ne mogu izraziti pomoću radikala. Tako, na primer, nijedan koren jednačine

$$z^5 - 4z - 2 = 0$$

ne može se izraziti pomoću radikala.

Međutim, stav 1 ne isključuje mogućnost da se konkretna jednačina stepena većeg od 4 sa numeričkim koeficijentima reši pomoću radikala. S druge strane, u mogućnosti smo da za svaku numeričku jednačinu stepena većeg od 4 odredimo sa tačnošću koja nam je potrebna svako njeno rešenje, pa i ono koje se ne može izraziti pomoću radikala. Za to se koriste približne metode o kojima će biti govora u odeljcima 2.6—2.9 ove knjige. Čak i za jednačine stepena 3 i 4 obično se koriste približne metode, jer formule koje daju rešenja nisu pogodne za praktična izračunavanja.

1.8.1. JEDNAČINA TREĆEG STEPENA

Jednačina trećeg stepena

(1) $$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \qquad (a_0 \neq 0;\ a_i \in \mathbf{C},\ i = 0, 1, 2, 3)$$

smenom

$$y = z - \frac{a_1}{3a_0},$$

svodi se na

(2) $$z^3 + pz + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbf{C}),$$

gde je

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}, \quad q = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{2a_1^3}{27a_0^3}.$$

Do rešenja jednačine (2) može se doći na sledeći način. Ako stavimo

(3) $$z = u + v,$$

jednačina (2) postaje

(4) $$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Umesto nepoznate z uveli smo pomoću (3) dve nepoznate u i v. Zato između u i v možemo dati jednu podesnu jednakost:

(5) $$3uv + p = 0, \quad \text{tj.} \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Prema tome, rešenja jednačine (2) mogu se dobiti iz sistema jednačina (4) i (5), tj. iz

(6) $$u^3 + v^3 = -q, \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Uporedo sa sistemom jednačina (6) posmatrajmo

(7) $$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

čija rešenja obuhvataju sva rešenja sistema (6).

Iz (7) izlazi da su u^3 i v^3 rešenja kvadratne jednačine

(8) $$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0,$$

koja se zove *rezolventa* jednačine trećeg stepena (2).

Rešenja jednačine (8) su

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Kako su posmatrani sistemi jednačina simetrični po u i v i kako je $z = u + v$, dovoljno je posmatrati slučaj

(9) $$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

(10) $$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Slučaj $u^3 = t_2$, $v^3 = t_1$ doveo bi do istog rezultata za jednačinu (2) kao i prethodni.

Jednačine (9) i (10) su oblika

(11) $$u^3 = A, \quad v^3 = B \quad (A, B \text{ kompleksni brojevi}).$$

Pretpostavimo da su rešenja ovih binomnih jednačina

u_1, u_2, u_3 odnosno v_1, v_2, v_3.

Prema tome, parovi

$$\begin{array}{lll} (u_1, v_1) & (u_1, v_2), & (u_1, v_3), \\ (u_2, v_1), & (u_2, v_2), & (u_2, v_3), \\ (u_3, v_1), & (u_3, v_2), & (u_3, v_3), \end{array} \tag{12}$$

su rešenja sistema jednačina (7).

Međutim, svako rešenje (u_k, v_l) sistema jednačina (7) nije rešenje sistema (6) već samo ono za koje je $u_k v_l = -\frac{p}{3}$.

Iz jednačine $u^3 = A$ sleduje

$$u_1 = \sqrt[3]{A}, \quad u_2 = \alpha\sqrt[3]{A}, \quad u_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A},$$

gde je, na primer, $\sqrt[3]{A}$ glavna vrednost i $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Iz jednačine $v^3 = B$ sleduje

$$v_1 = \sqrt[3]{B}, \quad v_2 = \alpha\sqrt[3]{B}, \quad v_3 = \alpha^2\sqrt[3]{B},$$

gde je $\sqrt[3]{B}$ ono rešenje jednačine $v^3 = B$ za koje važi

$$\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}.$$

Od devet rešenja (12) samo tri ispunjavaju ovaj uslov. To su:

$$1^\circ\ u_1 = \sqrt[3]{A},\ v_1 = \sqrt[3]{B}; \quad 2^\circ\ u_2 = \alpha\sqrt[3]{A},\ v_3 = \alpha^2\sqrt[3]{B};$$

$$3^\circ\ u_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A},\ v_2 = \alpha\sqrt[3]{B}.$$

Ovim smo dokazali:

Stav 1. *Rešenja jednačine* (2) *data su formulama:*

$$z_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \quad z_2 = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B}, \quad z_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B}, \tag{13}$$

gde $\sqrt[3]{A}$ *i* $\sqrt[3]{B}$ *zadovoljavaju uslov*

$$\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}. \tag{14}$$

Formule (13) zovu se CARDANOove formule.

U slučaju kada su p i q realni brojevi ispitaćemo prirodu rešenja jednačine (2) u zavisnosti od znaka izraza

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

1° $D>0$. Izaberimo za $\sqrt[3]{A}$ realnu vrednost. Tada na osnovu (14) imamo da je i $\sqrt[3]{B}$ realno. Prema tome, jednačina (2) ima jedno realno rešenje

$$z_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

i dva konjugovano kompleksna rešenja

$$z_2 = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}),$$

$$z_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}),$$

gde je $\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2° $D=0$. U ovom slučaju je $A = B = -\frac{q}{2}$, pa su sva tri rešenja realna

$$z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad z_2 = z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Jedno od ovih rešenja je bar dvostruko.

3° $D<0$. U ovom slučaju je

$$A = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}, \quad B = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}, \tag{15}$$

pa su brojevi A i B imaginarni.

Neka je $\sqrt[3]{A} = a + ib$. Tada iz uslova $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}$ dobijamo $\sqrt[3]{B} = a - ib$, pa iz CARDANOovih formula imamo

$$\begin{aligned} z_1 &= 2a, \\ z_2 &= -a - b\sqrt{3}, \\ z_3 &= -a + b\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Kako je $b \neq 0$, imamo $z_2 \neq z_3$. Pokazaćemo da je i $z_1 \neq z_2$. Ako bi bilo $z_1 = z_2$ imali bismo $b = -a\sqrt{3}$, odakle sleduje $A = -8a^3$, što nije mogućno jer bi to značilo da je A realno. Slično se dokazuje da je $z_1 \neq z_3$. Prema tome, u slučaju $D<0$ jednačina ima tri realna i različita korena.

Rešenja (16) se često pišu i u trigonometrijskom obliku. Na osnovu (15) imamo da je moduo kompleksnog broja A dat sa

$$|A| = \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

dok je argument određen pomoću

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

pri čemu se φ uzima u prvom ili drugom kvadrantu prema tome da li je q negativno ili pozitivno.

Prema tome je

$$A=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

pa je, na osnovu (16),

$$z_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$z_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right),$$

gde je $\cos\varphi=-\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $(0<\varphi<\pi)$

Ovim smo dokazali sledeći stav:

Stav 2. 1° *Ako su p i q realni brojevi i ako je* $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, *jednačina* (2) *ima jedan realan i dva imaginarna korena:*

$$z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$z_2=\alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$z_3=\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\alpha\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

gde je $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2° *Ako su p i q realni brojevi i* $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, *jednačina* (2) *ima sva tri realna korena od kojih je jedan bar dvostruk:*

$$z_1=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad z_2=z_3=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

3° *Ako su p i q realni brojevi i* $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, *jednačina* (2) *ima tri realna različita korena:*

$$z_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$z_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3},$$

$$z_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

gde je $\cos\varphi=-\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $(0<\varphi<\pi)$.

1.8.2. JEDNAČINA ČETVRTOG STEPENA

Jednačina četvrtog stepena

(1) $$a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4=0 \qquad (a_0\neq 0),$$

smenom

$$y=z-\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0},$$

svodi se na jednačinu

(2) $$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

gde je

$$p=\frac{1}{a_0}\left(a_2-\frac{3}{8}\frac{a_1^2}{a_0}\right),\quad q=\frac{1}{a_0}\left(a_3-\frac{1}{2}\frac{a_1a_2}{a_0}+\frac{1}{8}\frac{a_1^3}{a_0^2}\right),$$

$$r=\frac{1}{a_0}\left(a_4-\frac{1}{4}\frac{a_1a_3}{a_0}+\frac{1}{16}\frac{a_1^2a_2}{a_0^2}-\frac{3}{256}\frac{a_1^4}{a_0^3}\right).$$

Stav 1. *Koreni jednačine* (2) *su istovremeno i koreni kvadratnih jednačina*

(3) $$z^2+\frac{1}{2}p+\alpha_0=\sqrt{2\alpha_0}\left(z-\frac{q}{4\alpha_0}\right),\quad z^2+\frac{1}{2}p+\alpha_0=-\sqrt{2\alpha_0}\left(z-\frac{q}{4\alpha_0}\right),$$

gde je α_0 jedan koren jednačine

(4) $$8\alpha^3+8p\alpha^2-(8r-2p^2)\alpha-q^2=0,$$

i obrnuto, svi koreni jednačina (3) *su koreni jednačine* (2).

Dokaz. Za svako α važi identitet

(5) $$z^4+pz^2+qz+r=\left(z^2+\frac{1}{2}p+\alpha\right)^2-\left(2\alpha z^2-qz+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{1}{4}p^2\right)\right).$$

Odredimo α tako da izraz

$$2\alpha z^2-qz+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{1}{4}p^2\right)$$

bude potpun kvadrat jednog binoma po z. Ovo će biti ako i samo ako je

$$q^2-8\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{1}{4}p^2\right)=0,$$

tj. ako važi (4). Ako je α_0 jedan koren jednačine (4) tada (5) postaje

$$z^4+pz^2+qz+r=\left(z^2+\frac{1}{2}p+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(z-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2.$$

Prema tome, jednačina (2) zaista se raspada na dve kvadratne jednačine (3).

Ovim je dokazano da se jednačina četvrtog stepena može algebarski rešiti. Međutim, ovo rešenje zbog komplikovanosti nema velikog praktičnog značaja.

PRIMER 1. Jednačina četvrtog stepena

(1) $$y^4-4y^3+8y^2-9y+5=0,$$

smenom $y=z+1$ svodi se na jednačinu

$$z^4+2z^2-z+1=0.$$

Ova jednačina raspada se u dve kvadratne jednačine

(2) $$z^2+1+\alpha_0=\sqrt{2\alpha_0}\left(z+\frac{1}{4\alpha_0}\right),\quad z^2+1+\alpha_0=-\sqrt{2\alpha_0}\left(z+\frac{1}{4\alpha_0}\right),$$

gde je α_0 jedan koren jednačine

(3) $$8\alpha^3+16\alpha^2-1=0.$$

Da bismo odredili korene jednačine (3), svedimo je na kanonički oblik. To možemo izvršiti pomoću smene koja je korišćena u 1.8.1. Međutim, u ovom slučaju jednostavnije je uvesti smenu $\alpha=1/\beta$. Tada dobijamo

(4) $$\beta^3-16\beta-8=0.$$

Diskriminanta ove jednačine $D=-\frac{16}{27}\cdot 229=-\frac{3664}{27}<0$. Prema tome, jednačina ima sva tri realna korena. Za β_0 možemo uzeti, na primer, koren

$$\beta_0=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\qquad \left(\cos\varphi=-\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}};\ 0<\varphi<\pi\right),$$

koji za jednačinu (4) glasi

$$\beta_0=2\sqrt{\frac{16}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\qquad\left(\cos\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{16};\ 0<\varphi<\pi\right).$$

Prema tome, za α_0 možemo uzeti

$$\alpha_0=\left(2\sqrt{\frac{16}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^{-1}\qquad\left(\cos\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{16};\ 0<\varphi<\pi\right).$$

Ostaje još da se reše kvadratne jednačine (2).

Na izloženom primeru jasno se vidi sva komplikovanost ovog postupka. Šta više, u ovom slučaju nismo u mogućnosti ni da eksplicitno dobijemo rešenja jednačine (1), jer ne možemo tačno da nađemo $\cos\frac{\varphi}{3}$.

1.9. KARAKTERISTIČNI POLINOM

Definicija 1. *Ako je A kompleksna kvadratna matrica reda n, tada svaki vektor $x\in C^n$ $(x\neq O)$ koji zadovoljava uslov*

(1) $$Ax=\lambda x\qquad(\lambda\in C)$$

nazivamo karakteristični vektor matrice A, a broj λ karakteristična vrednost matrice A. Za vektor x kažemo da odgovara karakterističnoj vrednosti λ.

Definicija 2. *Skup svih karakterističnih vrednosti matrice A naziva se spektar matrice A.*

U literaturi se pored navedenih termina koriste i sledeći: sopstveni vektor i sopstvena vrednost kao i svojsveni vektor i svojstvena vrednost.

Iz (1) sleduje da ako je x karakterističan vektor matrice A, tada je i vektor μx $(\mu\in C,\ \mu\neq 0)$ takođe karakterističan vektor matrice A.

Definicija 3. *Neka je A kvadratna matrica. Matrica $A-\lambda I$ je karakteristična matrica matrice A, polinom $\det(A-\lambda I)$ po λ je karakterističan polinom matrice A. Jednačina $\det(A-\lambda I)=0$ je karakteristična jednačina matrice A.*

Za karakteristične vrednosti matrice A važi sledeći:

Stav 1. *Broj $\lambda_0\in C$ je karakteristična vrednost matrice A ako i samo ako λ_0 zadovoljava karakterističnu jednačinu $\det(A-\lambda I)=0$.*

Dokaz. Jednačina $Ax=\lambda x$ može se predstaviti u obliku

$$(A-\lambda I)\,x=O.$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovara sistem od n linearnih homogenih jednačina

(2) $$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})\,x_j=0\qquad(i=1,\ \ldots,\ n),$$

gde je δ_{ij} KRONECKEROVA delta i

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{Vmatrix},\qquad x=\begin{Vmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{Vmatrix}.$$

Da bi sistem jednačina (2) imao netrivijalna rešenja (jer je po uslovu $x\neq O$) potrebno je i dovoljno da bude $\det(A-\lambda I)=0$.

Ovim je stav 1 dokazan.

Kako je $\det(A-\lambda I)$ polinom reda n po λ, karakteristična jednačina matrice A ima n rešenja $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ među kojima može biti i jednakih.

Za karakterističan polinom matrice A važi sledeći

Stav 2. *Ako je A kompleksna kvadratna matrica i $f(\lambda)=\det(A-\lambda I)$, tada je*

(3) $$f(A)=O.$$

Dokaz. Označimo sa B adjungovanu matricu matrice $A-\lambda I$. Svi elementi matrice B su polinomi po λ stepena $\leq n-1$. Matrice čiji su elementi polinomi stepena $n-1$ po λ zovu se λ-matrice i one se mogu izraziti u obliku matričnog polinoma

$$B=B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\cdots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1},$$

gde su B_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ kvadratne matrice reda n koje ne zavise od λ.

PRIMER 1.

$$\begin{Vmatrix}\lambda^2-\lambda & \lambda+1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2+1\\ \lambda^2 & \lambda & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2\\ \lambda^2 & 0 & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-\lambda & \lambda & \lambda\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

$$=\lambda^2\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Kako je B adjungovana matrica matrice $A-\lambda I$, postoji jednakost

$$B(A-\lambda I)=I\det(A-\lambda I),$$

tj.

(4) $$(B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\cdots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1})(A-\lambda I)$$
$$=(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\cdots-p_{n-1}\lambda-p_n)I=f(\lambda)I.$$

Iz identiteta (4) proističe

(5)
$$\begin{aligned} -B_0 &= (-1)^n I,\\ B_0A-B_1 &= -(-1)^n p_1 I,\\ B_1A-B_2 &= -(-1)^n p_2 I,\\ &\vdots\\ B_{n-2}A-B_{n-1} &= -(-1)^n p_{n-1} I,\\ B_{n-1}A &= -(-1)^n p_n I. \end{aligned}$$

Ako se obe strane prve od jednakosti (5) pomnože sa A^n, druge sa A^{n-1}, treće sa A^{n-2}, ..., pretposlednje sa A i poslednje sa I, i tako dobijeni proizvodi saberu, dobija se

(6) $$A^n-p_1A^{n-1}-p_2A^{n-2}-\cdots-p_{n-1}A-p_nI=O,$$

tj. $f(A)=O$.

Ovim je dokaz stava 2 završen.

Taj se stav naziva CAYLEY-HAMILTONOV stav. On se formuliše i na sledeći način:

Stav 3. *Svaka matrica je, u matričnom smislu, nula svog karakterističnog polinoma.*

CAYLEY-HAMILTONOV stav je jedan od najvažnijih stavova u matričnoj algebri.

Polazeći od jednakosti (6), može se izračunati inverzna matrica A^{-1} nesingularne matrice A. Iz (6) izlazi

$$p_nI=A^n-p_1A^{n-1}-p_2A^{n-2}-\cdots-p_{n-1}A.$$

Odavde, posle množenja sa A^{-1}, dobija se

(7) $$p_nA^{-1}=A^{n-1}-p_1A^{n-2}-\cdots-p_{n-2}A-p_{n-1}I.$$

Posle množenja sa A^{-1} iz poslednje jednakosti sleduje

$$p_nA^{-2}=A^{n-2}-p_1A^{n-3}-\cdots-p_{n-3}A-p_{n-2}I-p_{n-1}A^{-1},$$

gde A^{-1} treba zameniti izrazom određenim sa (7).

Dakle, matrice

$$A^{-1},\quad A^{-2},\quad A^{-3},\ \ldots$$

mogu se izraziti kao linearne homogene kombinacije matrica

$$A^{n-1},\quad A^{n-2},\ \ldots,\ A,\ I.$$

Polazeći od jednakosti (6), matrice

$$A^n,\quad A^{n+1},\quad A^{n+2},\ \ldots$$

mogu se izraziti isto tako kao linearne homogene kombinacije matrica

$$A^{n-1},\quad A^{n-2},\ \ldots,\ A,\ I.$$

Zaista, iz (6) izlazi

(8) $$A^n=p_1A^{n-1}+p_2A^{n-2}+\cdots+p_{n-1}A+p_nI.$$

Odavde, posle množenja sa A, dobija se

(9) $$A^{n+1}=p_1A^n+p_2A^{n-1}+\cdots+p_{n-1}A^2+p_nA.$$

Vodeći računa o (8), jednakost (9) postaje

$$A^{n+1}=(p_1^2+p_2)A^{n-1}+(p_1p_2+p_3)A^{n-2}+\cdots+(p_1p_{n-1}+p_n)A+p_1p_nI.$$

Ovaj postupak može se proizvoljno puta ponoviti i na taj način dobiti matrice

$$A^{n+2},\quad A^{n+3},\ \ldots,\ A^{n+k},\ \ldots$$

Zadaci za rešavanje

M I, **Jednačine:** 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24;

A: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.23, 7.24, 7.25, 7.26, 7.27, 7.28, 7.29, 7.30, 7.31, 7.32, 7.37, 7.38, 7.48.

2. REŠAVANJE ALGEBARSKIH NUMERIČKIH JEDNAČINA

2.1. IZNALAŽENJE VIŠESTRUKIH KORENA

Stav 1. *Svaka nula reda* $k\ (1<k\leq n)$ *polinoma* $P(z)$ *je nula reda* $k-1$ *izvodnog polinoma* $P'(z)$.

Dokaz. Ako je $z=\alpha$ nula reda $k\ (1<k\leq n)$ polinoma $P(z)$ stepena n, ovaj polinom može se predstaviti u obliku

$$P(z)=(z-\alpha)^k R(z),$$

gde je $R(z)$ polinom stepena $n-k$ i $R(\alpha)\neq 0$.

Kako je

$$P'(z)=(z-\alpha)^{k-1}\big(k\,R(z)+(z-\alpha)\,R'(z)\big),$$

zaključujemo da je $z=\alpha$ nula reda $k-1$ izvodnog polinoma $P'(z)$ jer je, po pretpostavci, $R(\alpha)\neq 0$.

Iz stava 1 neposredno sleduje

Stav 2. *Da bi* $z=\alpha$ *bila nula reda* $k\ (1<k\leq n)$ *polinoma* $P(z)$ *stepena* n, *potrebno je i dovoljno da* $z=\alpha$ *bude nula polinoma* $P(z), P'(z), \ldots, P^{(k-1)}(z)$ *i da ne bude nula polinoma* $P^{(k)}(z)$.

Da bismo, dakle, odredili višestruke nule polinoma $P(z)$ treba naći najveći zajednički delilac polinoma $P(z)$ i $P'(z)$. Ovaj delilac se može odrediti pomoću EUKLIDovog algoritma (videti 1.2).

Svaka nula reda k najvećeg zajedničkog delioca polinoma $P(z)$ i $P'(z)$ je nula reda $k+1$ polinoma $P(z)$.

Prema tome, količnik $P(z):D(z)$, gde je $D(z)$ najveći zajednički delilac za $P(z)$ i $P'(z)$, ima samo proste nule.

Za određivanje višestrukih nula polinoma $D(z)$ može se ponovo primeniti isti postupak.

PRIMER 1. Ispitajmo da li polinom

$$P(z)=z^5-z^4-z^3-z^2+4z-2$$

ima višestrukih nula i ako ih ima, odredimo ih. Da bismo to postigli, primenimo EUKLIDOV algoritam na polinome

$$P(z)\ \text{ i }\ P'(z)=5z^4-4z^3-3z^2-2z+4.$$

Kako je dovoljno da umesto najvećeg zajedničkog delioca D dobijemo $aD\ (a=\text{const})$, posmatraćemo polinome $5P(z)$ i $P'(z)$. Tada imamo

$$(5z^5-5z^4-5z^3-5z^2+20z-10):(5z^4-4z^3-3z^2-2z+4)\ |\ z-\frac{1}{5}=Q_1(z)$$

$$\underline{5z^5-4z^4-3z^3-2z^2+4z}$$

$$-z^4-2z^3-3z^2+16z-10$$

$$\underline{-\ z^4+\frac{4}{5}z^3+\frac{3}{5}z^2+\frac{2}{5}z-\frac{4}{5}}$$

$$-\frac{14}{5}z^3-\frac{18}{5}z^2+\frac{78}{5}z-\frac{46}{5}=R_1(z).$$

Sada treba izvršiti deljenje polinoma $P'(z)$ polinomom $R_1(z)$. Umesto toga, jednostavnosti radi, podelićemo polinom $7P'(z)$ polinomom $-\frac{5}{2}R_1(z)$.

Tada je

$$(35z^4-28z^3-21z^2-14z+28):(7z^3+9z^2-39z+23)\ |\ 5z-\frac{73}{7}$$

$$\underline{35z^4+45z^3-195z^2+115z}$$

$$-73z^3+174z^2-129z+28$$

$$\underline{-73z^3-\frac{657}{7}z^2+\frac{2847}{7}z-\frac{1679}{7}}$$

$$\frac{1875}{7}z^2-\frac{3750}{7}z+\frac{1875}{7}=R_2(z).$$

Najzad, deobom polinoma $-\frac{5}{2}R_1(z)=7z^3+9z^2-39z+23$ sa $\frac{7}{1875}R_2(z)=z^2-2z+1$ imamo

$$(7z^3+9z^2-39z+23):(z^2-2z+1)=7z+23$$

$$\underline{7z^3-14z^2+7z}$$

$$23z^2-46z+23$$

$$\underline{23z^2-46z+23}$$

$$0=R_3(z).$$

Kako je ovo deljenje bez ostatka, polinomi $P(z)$ i $P'(z)$ imaju najveći zajednički delilac $\frac{7}{1875}R_2(z)=(z-1)^2$. Prema tome, polinom $P(z)$ ima višestruki koren $z=1$ trećeg reda.

2.2. NULE REALNIH POLINOMA

Stav 1. *Ako je* z_r *imaginarna nula reda* k_r *realnog polinoma* $P(z)$, *takođe je* $\bar{z}_r$ *njegova nula istog reda.*

Dokaz. Za realan polinom

$$P(z)=\sum_{r=0}^{n} a_r z^{n-r}$$

važi

$$\overline{P(z)}=\sum_{r=0}^{n} a_r \bar{z}^{n-r}, \quad \text{tj.} \quad \overline{P(z)}=P(\bar{z}).$$

Posmatramo li sada P u obliku

$$P(z)=a_0\prod_{r=1}^{\nu}(z-z_r)^{k_r} \qquad \Big(\sum_{r=1}^{\nu} k_r=n\Big),$$

prema prethodnom dobijamo

$$\overline{P(z)}=a_0\prod_{r=1}^{\nu}(\bar{z}-z_r)^{k_r},$$

odakle je

$$P(z)=a_0\prod_{r=1}^{\nu}(z-\bar{z}_r)^{k_r}.$$

Iz ove jednakosti neposredno izlazi stav 1.

Realan polinom ima realan faktor ili oblika

$$(z-z_0)^k \qquad (k \text{ red realne nule } z_0)$$

ili oblika

$$(z^2+pz+q)^k \qquad (p,\ q\in R;\ k \text{ red svake od nula } \alpha+i\beta,\ \alpha-i\beta \text{ za } \beta\neq 0),$$

jer je

$$(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta)=(z-\alpha)^2+\beta^2=z^2+pz+q \qquad (p,\ q \text{ realni brojevi}).$$

Prema tome, realan polinom $P(z)$ stepena n može se izraziti na jedinstven način u obliku proizvoda

$$P(z)=a_0\prod_{r=1}^{\nu}(z-z_r)^{s_r}\prod_{r=1}^{\mu}(z^2+p_r z+q_r)^{t_r},$$

gde su $z_i\,(i=1,\ldots,\nu)$, p_j, $q_j\,(j=1,\ldots,\mu)$ realni brojevi i $s_i\,(i=1,\ldots,\nu)$, $t_j\,(j=1,\ldots,\mu)$ prirodni brojevi takvi da je $\sum_{r=1}^{\nu}s_r+2\sum_{r=1}^{\mu}t_r=n$.

Ovo se može formulisati i na sledeći način:

Stav 2. *Svaki realan polinom može se na jedinstveni način (sa tačnošću do na redosled činilaca) predstaviti u obliku proizvoda najstarijeg koeficijenta a_0 i realnih polinoma reda 1 ili 2, pri čemu je diskriminanta polinoma reda 2 negativna.*

Primer 1. $z^4+1=(z^2+1)^2-2z^2=(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$.

Primer 2. $z^4+z^2+1=(z^2-z+1)(z^2+z+1)$.

Neposredna posledica prethodnog stava je:

Stav 3. *Realni polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu. Ako ih ima više, njihov broj je neparan.*

2.3. RACIONALNI KORENI

Stav 1. *Potreban uslov da racionalan broj $\frac{p}{q}$ (p i q relativno prosti brojevi i $pq\neq 0$) bude koren jednačine*

(1) $$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (a_k\in Z;\ a_0a_n\neq 0),$$

je $p\mid a_n\wedge q\mid a_0$.

Dokaz. Po pretpostavci, broj $\frac{p}{q}$ je koren date jednačine. Stoga je

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0,$$

tj.

(2) $$a_0\frac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0,$$

tj.

(3) $$a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}+a_n\frac{q^n}{p}=0.$$

Kako su brojevi p i q relativno prosti, da bi identitet (2) postojao, treba da se q sadrži u a_0. Da bi indentitet (3) postojao, treba da se p sadrži u a_n.

Ovim je stav 1 dokazan.

Prema tome, svi racionalni koreni jednačine (1) pripadaju skupu racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$, gde su p faktori (celi brojevi) broja a_n, dok su q faktori (celi brojevi) broja a_0. Dovoljno je uzeti samo pozitivne faktore (prirodne brojeve) broja a_0.

Primer 1. Ispitajmo da li jednačina

$$30z^5-9z^4-10z^3+3z^2-40z+12=0$$

ima racionalnih korena. Faktori broja $12\,(=a_n)$ su: $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$.

Pozitivni faktori broja $30\,(=a_0)$ su: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Prema tome, svi racionalni koreni ove jednačine pripadaju skupu

$$\Big\{\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{5},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{10},\ \pm\frac{1}{15},\ \pm\frac{1}{30};$$

$$\pm2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{5},\ \pm\frac{2}{15};$$

$$\pm3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{5},\ \pm\frac{3}{10};$$

$$\pm4,\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{4}{5},\ \pm\frac{4}{15};$$

$$\pm6,\ \pm\frac{6}{5};$$

$$\pm12,\ \pm\frac{12}{5}\Big\}.$$

Primenom Hornerovog postupka možemo proveriti da je jedini racionalni koren date jednačine $z=\frac{3}{10}$. Hornerova shema za ovaj slučaj glasi

$\frac{3}{10}$	30	−9	−10	3	−40	12
	30	0	−10	0	−40	0

2.4. GRANICE KORENA

2.4.1. GRANICE KOMPLEKSNIH KORENA

Postoji veliki broj stavova pomoću kojih se može odrediti gornja granica modula kompleksnih nula polinoma

(1) $P(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \qquad (a_0 \neq 0;\ n \geqq 1)$,

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Navešćemo sledeći jednostavan rezultat:

Stav 1. *Sve nule polinoma* (1) *leže u disku* $|z| \leqq \frac{A}{|a_0|}+1$, *gde je*

$$A=\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti $|z_1+\cdots+z_n| \leqq |z_1|+\cdots+|z_n|$ (videti 1.3 u odeljku: Nejednakosti), imamo

$$\begin{aligned} |a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n| &\leqq |a_1|\,|z|^{n-1}+\cdots+|a_n| \\ &\leqq A\,(|z|^{n-1}+\cdots+1) \\ &= A\,\frac{|z|^n-1}{|z|-1}. \end{aligned}$$

Ako je $|z| > \frac{A}{|a_0|}+1$, tada je

$$|a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n| \leqq A\,\frac{|z|^n}{|z|-1} < |a_0|\,|z|^n.$$

Na osnovu ovoga za $|z| > \frac{A}{|a_0|}+1$ dobijamo

$$|P(z)| = |a_0 z^n + (a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n)| \geqq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n| > 0,$$

pa polinom P zaista ne može imati nula van navedenog diska.

Dobijena procena je dosta gruba, ali je zbog svoje jednostavnosti korisna.

2.4.2. GRANICE REALNIH KORENA

Posmatrajmo algebarsku jednačinu

$$P(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0,\ n \geqq 1),$$

gde su a_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ i x realni brojevi.

Iz primera u paragrafu 2.3 videli smo da je ispitivanje da li data jednačina (čiji su koeficijenti celi brojevi) ima racionalnih korena skopčano sa jednostavnim ali ponekad dugačkim izračunavanjima. Stoga je od praktičnog značaja da se odrede granice između kojih leže realni koreni date jednačine.

Označimo sa L jednu gornju granicu pozitivnih korena, a sa l jednu donju granicu negativnih korena. Tada se svi realni koreni date jednačine nalaze u intervalu (l, L).

Ako se stavi $x=-t$, tada se određivanje donje granice negativnih korena jednačine $P(x)=0$ svodi na određivanje gornje granice pozitivnih korena jednačine $P(-t)=0$.

Za određivanje broja L postoje razni metodi. Od dva metoda bolji je onaj koji daje manju vrednost za L.

Broj L može se odrediti, na primer, primenom stava 1 iz 2.4.1. Navešćemo, takođe, metod *grupisanja članova* koji pored toga što je dosta praktičan može da dâ i znatno bolje rezultate. On se sastoji iz sledećeg:

Polinom $P(x)$ $(a_0>0)$ date algebarske jednačine na podesan način podeli se u grupe (sabirke) tako da u svakoj grupi najstariji član ima pozitivan koeficijent. Neka je $L_k\ (\geqq 0)$ takav broj da k-ta grupa bude nenegativna za $x \geqq L_k$. Tada je

$$L=\max\{L_1, L_2, \ldots\}.$$

PRIMER 1. Polinom jednačine $2x^4+x^3-15x^2+8x-1=0$ grupišimo na sledeći način:

$$(2x^4-15x^2)+(x^3-1)+8x.$$

Ovde je $L_1=\sqrt{7.5}$, $L_2=1$, $L_3=0$, pa je $L=\sqrt{7.5}$, tj. jedna gornja granica je 2.8.

Primetimo da se na osnovu stava 1 iz 2.4.1 dobija $L=8.5$, što je znatno slabije od dobijene granice.

Stavimo li $x=-t$, dobijamo

$$2t^4-t^3-15t^2-8t-1=0.$$

Ako polinom ove jednačine grupišemo u obliku

$$\left(\frac{1}{2}t^4-t^3\right)+(t^4-15t^2)+\left(\frac{1}{4}t^4-8t\right)+\left(\frac{1}{4}t^4-1\right),$$

tada je $L_1=2$, $L_2=\sqrt{15}$, $L_3=\sqrt[3]{32}$, $L_4=\sqrt{2}$, pa je, dakle, $L=3.9$.

To znači da se realni koreni ove jednačine nalaze između -3.9 i 2.8.

Transformacija $x=\frac{1}{t}$ transformiše najmanji pozitivan koren date jednačine u najveći pozitivan koren jednačine

$$t^4-8t^3+15t^2-t-2=0.$$

Polinom ove jednačine može se grupisati, na primer, na sledeći način:

$$t^2(t^2-8t+14)+(t^2-t-2),$$

pa je $L=5.5$. Prema tome, donja granica pozitivnih korena date jednačine je $\frac{1}{5.5}=0.1\ldots$

Transformacijom $x=-\frac{1}{t}$ najveći negativni koren date jednačine prelazi u najveći pozitivni koren jednačine

$$t^4+8t^3+15t^2+t-2=0.$$

Ako članove ovog polinoma grupišemo na sledeći način

$$(t^4-1)+(8t^3+15t^2)+(t-1),$$

imamo da je $L=1$. Prema tome gornja granica negativnih korena date jednačine je -1. To znači da pozitivni koreni date jednačine leže između 0.1 i 2.8, negativni između -3.9 i -1.

PRIMER 2. Polinom jednačine $x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0$ možemo, na primer, grupisati ovako:

$$\left(\frac{1}{2}x^4-2x^3\right)+\left(\frac{1}{3}x^4-3x^2\right)+\left(\frac{1}{8}x^4-15x\right)+\left(\frac{1}{24}x^4-3\right).$$

Ovde je $L=\sqrt[3]{120}$.

Drugi način grupisanja istog polinoma, naime

$$\left(\frac{1}{2}x^4-2x^3\right)+\left(\frac{1}{5}x^4-3x^2\right)+\left(\frac{1}{5}x^4-15x\right)+\left(\frac{1}{10}x^4-3\right),$$

daje $L=\sqrt[3]{75}$.

Treći način grupisanja

$$\left(\frac{1}{2}x^4-2x^3\right)+\left(\frac{1}{5}x^4-3x^2\right)+\left(\frac{1}{4}x^4-15x\right)+\left(\frac{1}{20}x^4-3\right)$$

dovodi do $L=4$.

Kao što vidimo, razni načini grupisanja (reprezentacije) polinoma dovode do raznih gornjih granica njegovih pozitivnih korena.

Stavimo li $x=-t$, dobijamo $t^4+2t^3-3t^2+15t-3=0$.

Ako polinom poslednje jednačine prikažemo u obliku

$$(t^2+2t-3)\,t^2+3\,(5t-1),$$

zaključujemo da je $L=1$.

Prema tome, svi realni koreni ove jednačine nalaze se u intervalu $(-1, 4)$.

2.5. RAZDVAJANJE KORENA

2.5.1. OPŠTE O RAZDVAJANJU KORENA

Pošto se prethodno odrede višestruki i racionalni koreni algebarske jednačine, izračunavaju se iracionalni koreni. Obično se prvo pristupa razdvajanju korena algebarske jednačine.

Kažemo da smo razdvojili (izolovali) realne korene jednačine

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbf{R})$$

ako smo odredili disjunktne intervale u kojima se nalazi jedan i samo jedan njen realan koren.

Za razdvajanje korena postoje razni metodi (Sturmov, Rolleov, grafički, itd.). Vrlo često se, zbog svoje praktičnosti, upotrebljava grafički metod. Pored ovog metoda, izložićemo i Rolleov metod.

2.5.2. GRAFIČKI METOD

Najčešće se primenjuju sledeće varijante grafičkog metoda.

Prva varijanta. Umesto jednačine

(1) $\quad f(x)=0,$

gde je f ma kakva funkcija realne promenljive x, posmatramo njoj ekvivalentnu jednačinu

(2) $\quad f_1(x)=f_2(x),$

gde su f_1 i f_2 podesno izabrane funkcije.

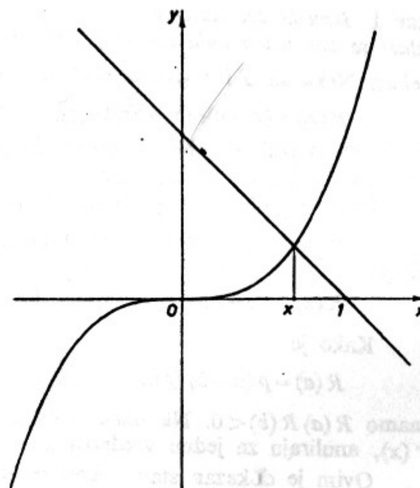
Ako su jednačine (1) i (2) ekvivalentne, apscise preseka grafika funkcija f_1 i f_2 su rešenja jednačine (1). Ukoliko je crtež preciznije izrađen, utoliko ćemo

sa većom tačnošću dobiti rešenje jednačine. Veoma je korisno ako pomoću crteža možemo odrediti interval (a, b) gde je $b-a=0.1$ u kome se nalazi jedno i samo jedno rešenje jednačine (1).

Primer 1. Realni koreni jednačine

$$x^3+x-1=0,$$

mogu se približno odrediti sa slike kao preseci parabole $y=x^3$ i prave $y=-x+1$ (videti sliku 2.5.2.1). Ova jednačina ima samo jedan realan koren i on je $x_1=0.68\ldots$[1]



Sl. 2.5.2.1.

Druga varijanta. Umesto jednačine (1) posmatrajmo sistem jednačina

$$f_1(x, y)=0, \qquad f_2(x, y)=0,$$

takav da se posle eliminacije parametra y dobija samo jednačina (1).

Ovaj metod je naročito koristan za razdvajanje korena jednačine četvrtog stepena. Umesto jednačine

(3) $\quad x^4+px^2+qx+r=0$

(kao što smo ranije videli na ovaj oblik može se svesti svaka jednačina četvrtog stepena), posmatrajmo sistem od dve jednačine

$$y=x^2, \qquad y^2+py+qx+r=0,$$

tj.

$$y=x^2, \qquad (x^2-y)+y^2+py+qx+r=0,$$

tj.

(4) $\quad y=x^2, \qquad x^2+y^2+(p-1)\,y+qx+r=0.$

Eliminacijom parametra y iz (4) dobija se jednačina (3).

Prema tome, realni koreni svake algebarske jednačine četvrtog stepena mogu se dobiti kao preseci parabole $y=x^2$ i kruga

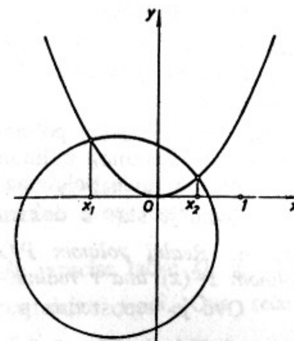
$$\left(x+\frac{q}{2}\right)^2+\left(y+\frac{p-1}{2}\right)^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-r.$$

Primer 2. Realni koreni jednačine

$$x^4+2x^2+x-1=0$$

mogu se pomoću opisanog metoda približno odrediti sa slike (videti sl. 2.5.2.2) kao preseci parabole $y=x^2$ i kruga

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}.$$



Sl. 2.5.2.2

Oni su $x_1=-0.8251098833\ldots,\quad x_2=0.4818155891\ldots$

[1] Tri tačke iza poslednje napisane decimale znače da su sve napisane cifre tačne.

2.5.3. ROLLEOV METOD

Za realne polinome važi:

Stav 1. *Između dve uzastopne realne nule a i b $(a<b)$ realnog polinoma $P(x)$ nalazi se bar jedna nula izvodnog polinoma $P'(x)$.*

Dokaz. Neka su a i b dve uzastopne nule reda p i q polinoma $P(x)$. Tada je

$$P(x)=(x-a)^p(x-b)^q Q(x),$$

gde je $Q(x)$ realan polinom takav da je $Q(a)\neq 0$ i $Q(b)\neq 0$, što znači da $Q(x)$ ima isti znak za $a\leqq x\leqq b$.

Izvodni polinom $P'(x)$ može se predstaviti u obliku

$$P'(x)=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}R(x),$$

gde je

$$R(x)=(x-a)(x-b)\,Q'(x)+\big(p(x-b)+q(x-a)\big)\,Q(x).$$

Kako je

$$R(a)=p(a-b)\,Q(a),\qquad R(b)=q(b-a)\,Q(b),$$

imamo $R(a)R(b)<0$. Na osnovu ovog zaključujemo da se $R(x)$, pa time i $P'(x)$, anuliraju za jednu vrednost x koja se nalazi između a i b.

Ovim je dokazan stav 1 koji se zove ROLLEOV stav.

PRIMEDBA 1. U analizi se dokazuje da ROLLEOV stav važi za mnogo opštije realne funkcije nego što su polinomi.

Navešćemo neke posledice stava 1.

Stav 2. *Između dve uzastopne nule izvodnog polinoma $P'(x)$ nalazi se najviše jedna nula polinoma $P(x)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da se između dve uzastopne nule α i β izvodnog polinoma $P'(x)$ nalaze dve nule a i b polinoma $P(x)$. Tada između a i b ne bi bilo nijedne nule izvodnog polinoma $P'(x)$, što je u kontradikciji sa stavom 1.

Ovim je dokazan stav 2.

Stav 3. *Ako su nule realnog polinoma $P(x)$ realne, takođe su realne sve nule izvodnog polinoma $P'(x)$ i nule izvodnog polinoma $P'(x)$ razdvajaju nule polinoma $P(x)$.*

Dokaz. Neka je $P(x)$ polinom stepena n. Tada je $P'(x)$ stepena $n-1$. Jedna jedina nula izvodnog polinoma $P'(x)$ nalazi se u svakom od $n-1$ intervala koji obrazuju nule polinoma $P(x)$.

Ovim je stav 3 dokazan.

Stav 4. *Realni polinom $P(x)$ ne može imati više od $r+1$ realnih nula, ako polinom $P'(x)$ ima r realnih nula.*

Ovo je neposredna posledica prethodnog stava.

PRIMER 1. Neka je $P(x)=3x^4-4x^3-12x^2+6$. Kako je $P'(x)=12x(x^2-x-2)$, zaključujemo da su nule izvodnog polinoma -1, 0, 2.

Formirajmo shemu

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	1	6	-26	$+\infty$

Na osnovu ove sheme zaključujemo da $P(x)$ ima tačno dve realne nule i da se one nalaze u intervalima $(0,1)$ i $(2,+\infty)$.

Drugi interval možemo suziti ako odredimo gornju granicu pozitivnih nula polinoma $P(x)$. Primenimo metod grupisanja članova. Ako $P(x)$ predstavimo u obliku

$$P(x)=3x^3(x-3)+x^2(5x-12)+6,$$

dobijamo $L_1=3$, $L_2=\dfrac{12}{5}$, te je $L=3$.

Prema tome, realne nule polinoma $P(x)$ leže u intervalima $(0,1)$ i $(2,3)$.

2.6. ITERACIJA

Neka je $g(x)=0$ data algebarska ili transcendentna jednačina. Ona se uvek može predstaviti u obliku

$$(1)\qquad x=f(x)$$

i to na beskrajno mnogo načina.

Tako, na primer, jednačini

$$x^3+x-1=0$$

mogu se dati sledeći oblici:

$$x=1-x^3,\qquad x=\sqrt[3]{1-x},\qquad x=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x},$$

$$x=x^3+2x-1,\qquad x=2x-\sqrt[3]{1-x},$$

itd.

Pretpostavimo da je izvodna funkcija f' neprekidna u intervalu (a,b) i da se u ovom intervalu nalazi samo jedno rešenje ξ jednačine (1).

U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxy posmatrajmo grafike funkcija

$$(2)\qquad y=x \quad \text{i} \quad y=f(x).$$

Apscisa presečne tačke ovih krivih je ξ.

Neka je P_0 jedna tačka krive $y=f(x)$ čija apscisa x_0 pripada intervalu (a,b). Prava koja prolazi kroz tačku P_0 paralelno x-osi seče pravu $y=x$ u tački Q_0.

Kako su $(x_0, f(x_0))$ koordinate tačke P_0, apscisa tačke Q_0 je $x_1=f(x_0)$.

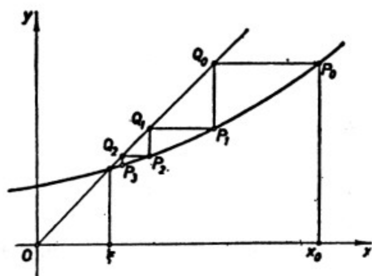
Povucimo sada kroz tačku Q_0 pravu paralelnu y-osi. Ona seče krivu $y=f(x)$ u tački P_1 čije su koordinate $(x_1, f(x_1))$.

Ako produžimo navedeni postupak konstrukcije tačaka, redom dobijamo tačke $Q_1, P_2, Q_2, P_3, \ldots$

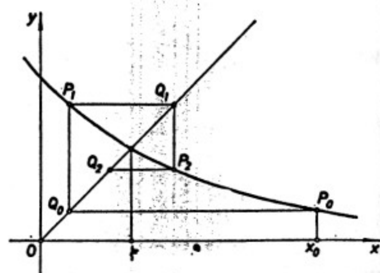
Apscise tačaka $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ su:

$$x_1=f(x_0),\ \ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\quad x_{n+1}=f(x_n).$$

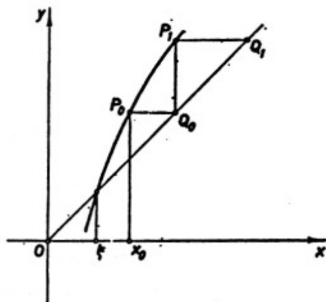
Kao što sa slika vidimo, navedenom konstrukcijom u dva slučaja (sl. 2.6.1 i sl. 2.6.2) približavamo se rešenju ξ ili *stepeničasto* (2.6.1) ili *spiralno* (sl. 2.6.2), dok se u ostala dva slučaja (sl. 2.6.3 i sl. 2.6.4) udaljavamo od rešenja.



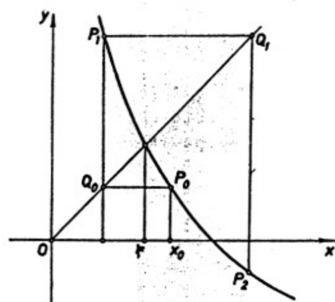
Sl. 2.6.1.



Sl. 2.6.2.



Sl. 2.6.3.



Sl. 2.6.4.

Stav 1. *Neka jednačina $x=f(x)$ ima samo jedno rešenje $\xi\in(a, b)$, neka je funkcija f diferencijabilna i*

(3) $\quad |f'(x)|\leq M<1 \quad$ *za svako* $x\in(a, b)$,

gde je M fiksni pozitivni broj. Tada niz

$$x_0,\quad x_1=f(x_0),\quad x_2=f(x_1),\ \ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots$$

konvergira rešenju ξ ako je $x_i\in(a, b)$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Dokaz. Kako je ξ, po pretpostavci, rešenje jednačine $x=f(x)$, biće $\xi=f(\xi)$. Primenom formule o konačnim priraštajima na izraz

$$x_n-\xi=f(x_{n-1})-f(\xi)$$

dobijamo

$$x_n-\xi=(x_{n-1}-\xi)\,f'(x_n^*),$$

gde je x_n^* jedna vrednost između x_{n-1} i ξ.

Iz poslednje jednakosti izlazi

(4) $\quad |x_n-\xi|=|x_{n-1}-\xi|\,|f'(x_n^*)|.$

Vodeći računa o uslovu (3), iz (4) nalazimo

$$|x_n-\xi|\leq M|x_{n-1}-\xi|,$$
$$|x_{n-1}-\xi|\leq M|x_{n-2}-\xi|,$$
$$\vdots$$
$$|x_1-\xi|\leq M|x_0-\xi|.$$

Odavde izlazi

(5) $\quad |x_n-\xi|\leq M^n|x_0-\xi|.$

Kako $M^n\to 0$ ako $n\to+\infty$, dobijamo

$$x_n\to\xi\qquad(n\to+\infty).$$

Određivanje rešenja ξ jednačine $x=f(x)$, kada je ispunjen uslov (3), pomoću rekurentne relacije

$$x_n=f(x_{n-1})\qquad(n=1, 2, \ldots),$$

gde je $x_0\in(a, b)$ početna vrednost, naziva se *metod iteracije* ili *metod sukcesivnih aproksimacija.*

Ako se rešenje ξ aproksimira sa x_n, grešku aproksimacije možemo na osnovu (5) proceniti pomoću

(6) $\quad |x_n-\xi|\leq M^n(b-a)\qquad(a<b),$

jer je $|x_0-\xi|<b-a$.

Vratimo se na geometrijsku interpretaciju ovog postupka. Slučaj prikazan na sl. 2.6.1 i 2.6.2 nastupa kada tangenta krive gradi sa x-osom ugao od α radijana pri čemu je

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4}\quad\text{ili}\quad\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$$

i tada se može primeniti metod iteracije.

Slučajevi prikazani na slikama 2.6.3 i 2.6.4 nastaju ako je

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\quad\text{ili}\quad\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$$

i onda se ne može primeniti metod iteracije. Međutim, u takvom slučaju se umesto sistema jednačina (2) može uzeti sistem jednačina

(7) $\quad y=x,\qquad y=h(x),$

gde je h inverzna funkcija funkcije f.

Sistemi jednačina (2) i (7) u intervalu (a, b) ekvivalentni su.

Ako je $|f'(x)|<1$ $(x\in(a, b))$, tada je $|h'(x)|>1$ i obrnuto.

Primer 1. Jednačina trećeg stepena $g(x)=x^3-3x+1=0$ ima između 0.3 i 0.4 jedno i samo jedno rešenje. Ovo možemo konstatovati, na primer, pomoću grafika funkcija $x\mapsto x^3$, $x\mapsto 3x-1$.

Primenom Hornerove sheme nalazimo

$$g(0.3)=0.127,\qquad g(0.4)=-0.136.$$

Data jednačina može se predstaviti u obliku $x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$.

Ovde je

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3},\quad f'(x)=x^2.$$

Kako je

$$|f'(x)|=x^2<\frac{16}{100}<1 \quad \text{za} \quad x\in\left(\frac{3}{10},\ \frac{4}{10}\right),$$

navedeni metod iteracije može se primeniti. Neka je $x_0=0.31$. Tada se dobija

$$x_1=\frac{1}{3}\cdot 0.31^3+\frac{1}{3}\approx 0.343.$$

Polazeći od ove vrednosti, dolazimo redom do

$$x_2=\frac{1}{3}\cdot 0{,}343^3+\frac{1}{3}\approx 0.3468.$$

$$x_3=\frac{1}{3}\cdot 0.3468^3+\frac{1}{3}\approx 0.3472,$$

$$x_4=\frac{1}{3}\cdot 0.3472^3+\frac{1}{3}\approx 0.34728.$$

Greška koja se čini ako se ξ aproksimira sa x_4 može se, na osnovu (5), proceniti sa

$$|\xi-0.3472|<0.16^4\cdot 0.1<0.00007.$$

Prema tome, sigurno je $0.3472<\xi<0.3474$.

PRIMEDBA 1. Tačna vrednost tog rešenja je $\xi=2\cos 80°=0.347296\ldots$

PRIMER 2. Transcendentna jednačina $2^x=4x$ u intervalu (0, 1) ima jedno i samo jedno rešenje. To pokazuje i slika 2.6.5 gde su nacrtane krive $y=4x$ i $y=2^x$.

Predstavimo jednačinu u obliku

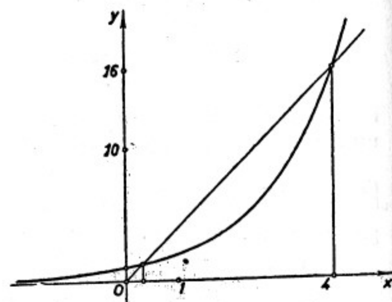
$$x=f(x),\quad \text{tj.}\quad x=2^{x-2}.$$

Ovde je

$$|f'(x)|=\frac{\log_e 2}{4}\cdot 2^x$$
$$=(0.173\ldots)2^x$$
$$<1 \quad \text{za} \quad x\in[0,\ 1].$$

Dakle, metod iteracije ovde je primenljiv. Stavimo li $x_0=0$, dobijamo redom

$$x_1=2^{x_0-2} \qquad =0.25$$
$$x_2=2^{x_1-2}=2^{0.25-2} \quad =0.297301\ldots$$
$$x_3=2^{x_2-2}=2^{0.29730-2}=0.307210\ldots$$
$$x_4=2^{x_3-2}=2^{0.30721-2}=0.309328\ldots$$
$$x_5=2^{x_4-2}=2^{0.30933-2}=0.309783\ldots$$
$$x_6=2^{x_5-2}=2^{0.30978-2}=0.309879\ldots$$
$$x_7=2^{x_6-2}=2^{0.30988-2}=0.309901\ldots$$



Sl. 2.6.5.

Upotrebljavajući tablice veće tačnosti i nastavljajući isti postupak, nalazimo:

$$x=0.30990\,69324\ldots$$

PRIMER 3. Izračunajmo sa tri tačna decimala visinu h loptinog odsečka čija je zapremina jednaka četvrtini zapremine te lopte, ako je poluprečnik lopte $r=1$.

Zapremina loptinog odsečka data je formulom

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h),$$

pa je prema uslovu zadatka

$$\frac{\pi h^2}{3}(3-h)=\frac{\pi}{3}.$$

Odavde je

(1) $\qquad h^3-3h^2+1=0.$

Ako stavimo $x=h-1$, jednačina (1) postaje

(2) $\qquad x^3-3x-1=0.$

Budući da koreni jednačine (2) leže u intervalima $(-2,-1)$, $(-1,0)$ i $(1,2)$, koreni jednačine (1) leže u intervalima $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,3)$.

Kako je $0<h<r(=1)$, rešenju problema odgovara samo vrednost h iz intervala $(0,1)$, tj. vrednost x iz intervala $(-1,0)$.

Iz (2) je $x=\frac{x^3-1}{3}$. Kako je $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{3}\right)=x^2<1$ za svako $x\in(-1,0)$, može se primeniti metod iteracije. Ako uzmemo $x_0=0$, dobijamo niz

$$x_0=0,\quad x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=-0.3457,\quad x_3=-0.3471,\ \ldots$$

koji konvergira korenu jednačine (2) iz intervala $(-1,0)$.

Za funkciju $f(x)=x^3-3x-1$ je $f(-0.348)>0$ i $f(-0.347)<0$, pa su u rezultatu $x=-0.3471$ prva tri decimala sigurno tačna.

Na osnovu ovoga tražena visina je $h=0.6529$.

PRIMEDBA 1. Tačna vrednost za x je $x=2\cos 110°=-0.347296\ldots$

2.7. NEWTONOV METOD

Pretpostavimo da se:

1° u intervalu (a,b) nalazi samo jedno rešenje ξ jednačine $g(x)=0$;

2° izvodna funkcija g' ne anulira ni za jedno $x\in(a,b)$, kao i da je g'' neprekidna funkcija za $x\in(a,b)$.

Jednačini $g(x)=0$, pod navedenim pretpostavkama, ekvivalentna je jednačina

(1) $\qquad x=f(x),\quad \text{gde je}\quad f(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}.$

Ako je

$$|f'(x)|\leq M<1 \quad \text{za} \quad x\in(a,b) \qquad (M \text{ fiksni pozitivni broj}),$$

tj. ako je

$$\left|\frac{g(x)\,g''(x)}{g'(x)^2}\right|\leq M<1 \quad \text{za} \quad x\in(a,b),$$

na jednačinu (1) može se primeniti metod iteracije (videti 2.6).

Izaberemo li početno $x_0 \in (a, b)$, tada ćemo imati niz

(2) $$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})},$$

koji sigurno konvergira ka ξ. U tome se sastoji NEWTONOV metod.

Geometrijska interpretacija NEWTONOVOG metoda. Funkcija g je monotona u intervalu (a, b), jer se po pretpostavci njena izvodna funkcija g' ne anulira ni za jedno $x \in (a, b)$.

Funkcija g anulira se u (a, b) za jednu jedinu vrednost ξ, te je $g(a)\,g(b) < 0$.

Posmatraćemo najpre samo slučaj kada g'' ne menja znak u intervalu (a, b). Neka je $g'(x) > 0$ za $x \in (a, b)$.

Tangenta u tački B (sl. 2.7.1) krive $y = g(x)$ seče x-osu u tački T_1 za čiju apscisu b_1 važi $\xi < b_1 < b$. Iz šrafiranog trougla neposredno izlazi

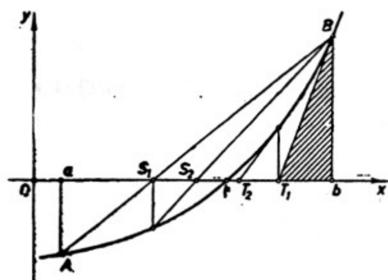
$$g'(b) = \frac{g(b)}{b - b_1},$$

odakle je

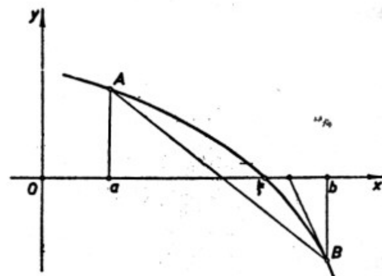
(3) $$b_1 = b - \frac{g(b)}{g'(b)}.$$

Ako u formuli (2) stavimo $n = 1$, $x_1 = b_1$, $x_0 = b$, dobijamo upravo formulu (3).

Dakle, aproksimativna vrednost b_1 je apscisa presečne tačke tangente krive $y = g(x)$ (u tački apscise $x = b$) sa x-osom. Stoga se ovaj metod naziva i *tangentni metod.*



Sl. 2.7.1.



Sl. 2.7.2.

Ako sada konstruišemo tangentu krive $y = g(x)$ u tački apscise b_1, dobijamo tačku T_2 čija je apscisa

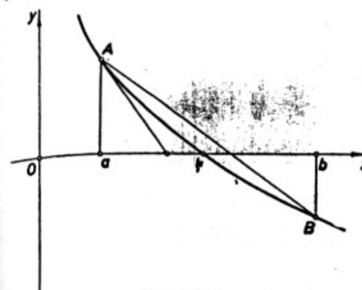
$$b_2 = b_1 - \frac{g(b_1)}{g'(b_1)}.$$

Prema slici je $\xi < b_2 < b_1 < b$.

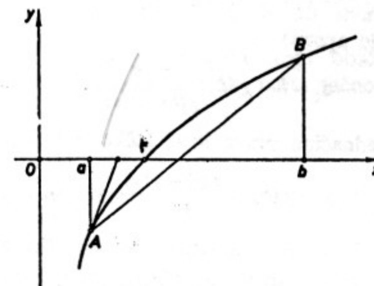
Ponavljanjem navedenog postupka približavamo se zdesna sve više i više tački ξ.

Primenom ovog metoda približavamo se zdesna sve više i više tački ξ i u slučaju krive koja ima oblik prikazan na sl. 2.7.2.

U slučajevima krivih koje su prikazane na slikama 2.7.3 i 2.7.4, tački ξ približavaćemo se sleva.



Sl. 2.7.3.



Sl. 2.7.4.

FOURIER je dao sledeći kriterijum:

x_1 je bliže rešenju ξ nego x_0 ako se usvoji za x_0 ona od vrednosti a i b za koju je $g(x_0)\,g''(x_0) > 0$.

2.8. METOD REGULA FALSI

Pretpostavimo da se:

1° u intervalu (a, b) nalazi samo jedno rešenje ξ jednačine $g(x) = 0$;

2° izvodna funkcija g' ne anulira ni za jedno $x \in (a, b)$, kao i da je g'' neprekidna funkcija za $x \in (a, b)$.

Jednačina $g(x) = 0$, na osnovu učinjenih pretpostavki, ekvivalentna je sa

(1) $$x = b - g(b)\frac{b - x}{g(b) - g(x)}, \quad \text{tj.} \quad x = f(x).$$

Ako je

$$|f'(x)| = \left|\frac{g(b)}{(g(b) - g(x))^2}\big(g(b) - g(x) + (x - b)\,g'(x)\big)\right| \le M < 1,$$

na $x = f(x)$ može se primeniti metod iteracije.

Kako je, na osnovu TAYLOROVE formule,

$$g(b) = g(x) + (b - x)\,g'(u_1), \quad g(b) = g(x) + (b - x)\,g'(x) + \frac{(b - x)^2}{2}\,g''(u_2),$$

gde je

$$u_1 = x + \theta_1(b - x), \qquad u_2 = x + \theta_2(b - x) \qquad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1),$$

dobijamo

$$|f'(x)| = \left|\frac{g(b)\,g''(u_2)}{2g'(u_1)^2}\right|.$$

U posmatranom intervalu funkcija g' se ne anulira, a funkcija g'' je neprekidna. Prema tome, ako se b uzme dovoljno blizu rešenju ξ jednačine $g(x) = 0$, tako da $g(b)$ bude dovoljno malo, biće i $f'(x)$ takođe dovoljno malo.

Prema tome, kako je zadovoljen uslov (3) iz 2.6, proces iteracije u ovom slučaju će konvergirati; tj. izaberemo li $x_0 \in (a, b)$, niz

(2) $$x_n = b - g(b)\frac{b - x_{n-1}}{g(b) - g(x_{n-1})}$$

konvergira ka ξ.

Geometrijska interpretacija metoda regula falsi. Zadržimo se na slučaju prikazanom na sl. 2.7.1. Spojimo li tačke A i B pravom, dobijamo tačku S_1 čija je apscisa

$$(3) \qquad a_1 = b - g(b)\frac{b-a}{g(b)-g(a)},$$

jer jednačina prave kroz tačke A i B glasi

$$y - g(b) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-b).$$

Stavimo li $x_0 = a$ u formulu (2) dobijamo upravo formulu (3).

Prema tome, aproksimativna vrednost a_1 je apscisa presečene tačke tetive AB sa x-osom. Stoga se ovaj metod naziva i *tetivni metod.*

Konstruišemo li ponovo tetivu koja prolazi kroz tačku B i kroz tačku krive čija je apscisa a_1, dobijamo tačku S_2 apscise a_2 za koju je $a<a_1<a_2<\xi$.

Ponavljanjem ovog postupka približavamo se sleva sve više i više tački ξ.

Ovim metodom približavaćemo se sve više sleva tački ξ i u slučaju kada kriva ima oblik prikazan na sl. 2.7.2.

U slučajevima koji su prikazani na sl. 2.7.3. i 2.7.4. tački ξ približavaćemo se zdesna.

2.9. KOMBINOVANI METOD

Kombinovani metod se sastoji u naizmeničnoj primeni NEWTONovog metoda i metoda regula falsi. Time se približavamo tački ξ sa obe strane i to metodom tangente sleva a metodom tetive zdesna (sl. 2.7.3 i 2.7.4), odnosno metodom tangente zdesna a metodom tetive sleva (sl. 2.7.1 i 2.7.2).

Na primer, u slučaju slike 2.7.1, jednovremenom primenom NEWTONovog metoda i metoda regula falsi, dobijamo a_k i b_k pri čemu je $a_k<\xi<b_k$.

Ukoliko je k veće, utoliko će razlika $|b_k-a_k|$ biti manja.

Prednost ovoga metoda je i u tome što se jednostavno može dobiti jedna gornja granica greške koja se čini ako se rešenje ξ aproksimira vrednošću x_k iz intervala (a_k, b_k). Naime, tada je

$$|x_k-\xi|<|b_k-a_k|.$$

U praksi se umesto ovog kombinovanog metoda često koristi sledeća modifikovana varijanta ovog metoda koja je naročito korisna kada se traži rešenje sa većom tačnošću.

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi za primenu NEWTONovog metoda i metoda regula falsi. Primenimo na interval (a, b), u kome se nalazi samo jedan koren funkcije $x \mapsto g(x)$, jedan od ova dva metoda, recimo prvo NEWTONov metod. Pretpostavimo takođe da grafik funkcije g ima oblik prikazan na slici 2.7.1. Tada će se rešenje jednačine $g(x)=0$ nalaziti u intervalu (a, b_1). Umesto da odmah na ovaj interval primenimo metod regula falsi, izračunaćemo vrednost funkcije g u tački $\frac{a+b_1}{2}$. Na osnovu toga možemo zaključiti u kome se od dva intervala $\left(a, \frac{a+b_1}{2}\right)$ i $\left(\frac{a+b_1}{2}, b_1\right)$ nalazi traženo rešenje. Neka se rešenje nalazi u intervalu (a', b'). Pre nego što primenimo ponovo NEWTONov metod, izračunaćemo vrednost funkcije g u tački $\frac{a'+b'}{2}$ i na osnovu toga suziti interval u kome se nalazi traženo rešenje. Tek na tako suženi interval primenjujemo ponovo NEWTONov metod. Ovaj postupak ponavljamo sve dok ne postignemo potrebnu tačnost.

Primetimo da ovaj postupak ne zahteva veći broj operacija nego običan kombinovani metod i da sa istim brojem operacija daje znatno veću tačnost.

PRIMER 1. Jednačina

$$(1) \qquad x^3+3x-1=0$$

ima samo jedan realan koren koji se nalazi u intervalu (0.3, 0.4). Ova činjenica može se utvrditi, na primer, grafičkim putem.

Posmatrajmo funkciju g definisanu sa

$$(2) \qquad g(x)=x^3+3x-1.$$

Kako je $g'(x)=3x^2+3$, $g''(x)=6x$, u posmatranom intervalu je $g'(x)>0$ i $g''(x)>0$.

Primenimo prvo NEWTONov (tangentni) metod. Budući da je $g(0.4)\,g''(0.4)>0$, pođimo od tačke 0.4. Kako je $g(0.4)=0.264$ i $g'(0.4)=3.48$, na osnovu formule (2) iz 2.7 imamo

$$b=0.4-\frac{0.264}{3.48}=0.3241\ldots$$

Prema tome, koren jednačine (1) nalazi se u intervalu (0.3, 0.3242). Pre nego što primenimo metod regula falsi, nađimo vrednost funkcije g u tački $\frac{0.3+0.3242}{2}=0.3121$.

Kako je $g(0.3121)=-0.033299459439<0$, traženo rešenje nalazi se u intervalu (0.3121, 0.3242).

Primenimo sada metod regula falsi. Kako je $g(0.3242)=0.006675248488$, na osnovu formule (2) iz 2.8 dobijamo

$$a_1=0.3242-6675248488\cdot\frac{0.121}{39974707927}=0.3221\ldots,$$

pa se traženo rešenje jednačine (1) nalazi u intervalu (0.3221, 0.3242).

Prema tome, u rezultatu 0.3221 prva dva decimala su sigurno tačna.

Ako bi se tražila veća tačnost, opisani postupak mogli bismo potreban broj puta ponoviti.

Da smo primenili metod regula falsi na interval (0.3, 0.3242), ne bismo odmah dobili rezultat u kome su sigurno prva dva decimala tačna.

Tačna vrednost ovog korena je $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, prema stavu 1 u 1.8.1.

PRIMEDBA 1. U dosadašnjim razmatranjima zadržali smo se na slučajevima kada se g'' ne anulira ni za jedno $x\in(a, b)$. Ako je taj uslov ispunjen i ako je

$$\left|\frac{g(x)\,g''(x)}{g'(x)^2}\right|\leqq M<1 \qquad ((x\in(a, b)),$$

mogu se jednovremeno primeniti oba metoda.

Međutim, uslov da se g'' ne anulira nije neophodan.

Zadaci za rešavanje

M I, Jednačine: **1.32, 1.33, 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.40, 1.41, 1.45, 1.46, 2.1, 2.2, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 3.1, 3.3, 3.11, 3.14, 3.24;**
A: **8.15, 8.28, 9.16.**

3. INTERPOLACIJA

3.1. OPŠTI POJMOVI

Neka su $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ date vrednosti funkcije f u tačkama $x_1, \ldots, x_n$, koje se nazivaju čvorovi interpolacije. Problem interpolacije sastoji se u nalaženju neke jednostavne funkcije g koja ima osobinu

$$g(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Kako je polinom jedna od najjednostavnijih funkcija, najčešće se vrši interpolacija polinomima.

Najjednostavnija je linearna interpolacija (slučaj kada su data dva čvora interpolacije). U slučajevima kada imamo više od dva čvora interpolacije, najčešće se koriste LAGRANGEova i NEWTONova interpolaciona formula.

Osnovi stav na kome se zasniva mogućnost aproksimacije date funkcije polinomom je sledeći WEIERSTRASSov stav:

Stav 1. *Ako je f neprekidna funkcija* na $[a, b]$, *tada za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji polinom $P_n(x)$ stepena $n = n(\varepsilon)$ takav da za svako $x \in [a, b]$ važi*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

3.2. LINEARNA INTERPOLACIJA

Neka su date dve tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ koje pripadaju grafu funkcije f. Jednačina prave koja prolazi kroz ove tačke je

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Linearna interpolacija sastoji se u tome da se na segmentu $[x_1, x_2]$ funkcija f zameni polinomom

(1) $$P(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Linearna interpolacija ima široku primenu. Pomenućemo samo neke.

1° U tablicama koje postoje za pojedine klase funkcija date su vrednosti samo za pojedine vrednosti argumenta. Za vrednost argumenta koje nisu u tablicama vrednosti funkcija određuju se pomoću linearne interpolacije.

2° NEWTONov metod za približno rešavanje jednačina zasniva se, u stvari, na linearnoj interpolaciji.

3.3. LAGRANGEOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Potražimo polinom $P(x)$ stepena $\leq n-1$ koji dobija n datih vrednosti $y_1, \ldots, y_n$ za n raznih vrednosti promenljive x, naime za $x_1, \ldots, x_n$.

Polinom $Q_i(x)$ stepena $\leq n-1$ koji ima osobinu $Q_i(x_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$, glasi

$$Q_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j).$$

Neka je $Q_i(x_i) = \alpha_i \neq 0$. Polinom $S_i(x) = \dfrac{y_i}{\alpha_i} Q_i(x)$ ima osobinu

$$S_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j), \qquad S_i(x_j) = y_i \quad (i = j).$$

Prema tome, polinom

(1) $$P(x) = S_1(x) + \cdots + S_n(x)$$

je jedan od polinoma koji za $x_1, \ldots, x_n$ dobija vrednosti $y_1, \ldots, y_n$. Dokažimo da je to jedini takav polinom.

Pretpostavimo da postoji još neki polinom $p(x)$ stepena $\leq n-1$ koji ima traženu osobinu. Tada polinom $P(x) - p(x)$ ima n nula: $x_1, \ldots, x_n$ a to nije moguće jer je njegov stepen $\leq n-1$. Prema tome, $P(x) \equiv p(x)$.

Polinom (1), koji se može predstaviti u obliku

(2) $$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} y_2 + \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} y_n,$$

naziva se LAGRANGEov interpolacioni polinom.

Primetimo da se za $n = 2$ polinom (2) svodi na polinom (1) iz 3.2.

Izračunajmo sada grešku koja se čini pri aproksimaciji neke funkcije f (koja ima sve izvode do reda n) LAGRANGEovim polinomom $P(x)$, tako da u tačkama x_i $(i = 1, \ldots, n)$ bude $f(x_i) = P(x_i)$. Funkciju f možemo predstaviti u obliku

$$f(x) = P(x) + R(x),$$

pri čemu R ima nule $x_1, \ldots, x_n$, pa možemo staviti

$$R(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)\, r(x).$$

Posmatrajmo funkciju F definisanu sa

$$F(X) = P(X) + (X - x_1) \cdots (X - x_n)\, r(x) - f(X).$$

Nule ove funkcije su $X = x, x_1, \ldots, x_n$. Prema ROLLEovoj teoremi izvodna funkcija F' mora imati između ovih nula bar n nula; funkcija F'' mora imati bar $n-1$ nulu koje se nalaze između nula funkcije F'; ..., funkcija $F^{(n)}$ mora imati bar jednu nulu koja se nalazi između nula funkcije $F^{(n-1)}$. Prema tome, postojaće neka tačka ξ takva da je

$$F^{(n)}(\xi) = n!\, r(x) - f^{(n)}(\xi) = 0.$$

Na osnovu ovoga je

$$f(x)=P(x)+(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

te je

$$|R(x)|=|f(x)-P(x)|\leq\frac{|(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{n!}M,$$

gde je $M=\max|f^{(n)}(x)|$ na segmentu na kome se nalaze tačke $x_i\,(i=1,\ldots,n)$.

3.4. NEWTONOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Izraz definisan sa

$$\mathrm{D}f(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

naziva se devidirana razlika prvog reda funkcije $x\mapsto f(x)$. Devidirana razlika drugog reda definiše se pomoću formule

$$\mathrm{D}^2f(x_i)=\frac{\mathrm{D}f(x_{i+1})-\mathrm{D}f(x_i)}{x_{i+2}-x_i}.$$

Uopšte, devidirana razlika k-tog reda funkcije $x\mapsto f(x)$ je

(1) $$\mathrm{D}^kf(x_i)=\frac{\mathrm{D}^{k-1}f(x_{i+1})-\mathrm{D}^{k-1}f(x_i)}{x_{i+k}-x_i}.$$

Između ovako definisanih razlika postoji veza

(2) $$f(x_k)=f(x_0)+(x_k-x_0)\mathrm{D}f(x_0)+(x_k-x_0)(x_k-x_1)\mathrm{D}^2f(x_0)+\cdots+(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\mathrm{D}^kf(x_0).$$

Dokazaćemo ovu formulu metodom matematičke indukcije. Za $k=1$ formula (2) je tačna, jer imamo

$$f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)\mathrm{D}f(x_0).$$

Pretpostavimo da je formula (2) tačna za $k=n-1$. Tada, uzimajući tačke $x_1,\ldots,x_n$, imamo

(3) $$f(x_n)=f(x_1)+(x_n-x_1)\mathrm{D}f(x_1)+(x_n-x_1)(x_n-x_2)\mathrm{D}^2f(x_1)+\cdots+(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\mathrm{D}^{n-1}f(x_1).$$

Kako je, na osnovu (1),

$$\mathrm{D}^{k-1}f(x_1)=\mathrm{D}^{k-1}f(x_0)+(x_k-x_0)\mathrm{D}^kf(x_0)\qquad(k=1,\ldots,n),$$

(3) možemo predstaviti u obliku

$$f(x_n)=f(x_0)+(x_1-x_0)\mathrm{D}f(x_0)+(x_n-x_1)\big(\mathrm{D}f(x_0)+(x_2-x_0)\mathrm{D}^2f(x_0)\big)+(x_n-x_1)(x_n-x_2)\big(\mathrm{D}^2f(x_0)+(x_3-x_0)\mathrm{D}^3f(x_0)\big)+\cdots+(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\big(\mathrm{D}^{n-1}f(x_0)+(x_n-x_0)\mathrm{D}^nf(x_0)\big).$$

Posle sređivanja dobijamo (2) za $k=n$.

Odredimo sada konstante $a_0, a_1, \ldots, a_n$ u

(4) $$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

tako da je

(5) $$P_n(x_k)=f(x_k)\qquad(k=0,1,\ldots,n).$$

Za $x=x_0$ iz (4), na osnovu (5), dobijamo $a_0=f(x_0)$. Za $x=x_1$ iz (4), na osnovu (5) i (2), dobijamo $a_1=\mathrm{D}f(x_0)$. Produžujući ovaj postupak i koristeći se formulom (2), nalazimo da je uopšte

$$a_k=\mathrm{D}^kf(x_0)\qquad(k=1,\ldots,n).$$

Prema tome, polinom (4) može se predstaviti u obliku

(6) $$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)\mathrm{D}f(x_0)+(x-x_0)(x-x_1)\mathrm{D}^2f(x_0)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\mathrm{D}^nf(x_0).$$

Ova formula naziva se NEWTONova interpolaciona formula za argumente u nejednakim intervalima.

Ako su vrednosti x_i ekvidistantne, tj. ako je

$$x_{i+1}-x_i=h\qquad(i=0,1,\ldots,n),$$

definisaćemo razliku prvog reda funkcije $x\mapsto f(x)$ u tački $x=x_i$ izrazom

$$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i).$$

Uopšte razliku m-tog reda funkcije $x\mapsto f(x)$ u tački $x=x_i$ definišemo sa

$$\Delta^mf(x_i)=\Delta^{m-1}f(x_i+h)-\Delta^{m-1}f(x_i).$$

Matematičkom indukcijom se dokazuje sledeća formula pomoću koje se izražava razlika m-tog reda funkcije $x\mapsto f(x)$ u tački $x=x_0$:

$$\Delta^mf(x_0)=\binom{m}{0}f(x_0+mh)-\binom{m}{1}f(x_0+(m-1)h)+\cdots+(-1)^k\binom{m}{k}f(x_0+(m-k)h)+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}f(x_0+h)+(-1)^m\binom{m}{m}f(x_0).$$

U ovom slučaju NEWTONova interpolaciona formula postaje

(7) $$P_n(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\frac{\Delta f(x_0)}{h}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2f(x_0)}{h^2}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta^nf(x_0)}{h^n}.$$

Navedimo, najzad, još dve moguće reprezentacije NEWTONove interpolacione formule. Ako uvedemo oznaku $t=\frac{x-x_0}{h}$, formulu (7) možemo prikazati na sledeći način:

(8) $$P_n(x_0+ht)=y_0+\binom{t}{1}\Delta y_0+\binom{t}{2}\Delta^2y_0+\cdots+\binom{t}{n}\Delta^ny_0,$$

gde je $\Delta^ky_0=\Delta^kf(x_0)$.

Formuli (7) možemo dati i oblik

(9) $$P_n(x_0+ht)=y_0-C_{-t}^{(1)}\Delta y_{-1}+C_{-t}^{(2)}\Delta^2 y_{-2}-\cdots+(-1)^n C_{-t}^{(n)}\Delta^n y_{-n},$$

gde je

$$C_{-t}^{(k)}=(-1)^k\frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+k-1)}{k!},\quad \Delta^k y_{-k}=\Delta^k f(x_0-kh).$$

Formula (8) naziva se prva NEWTONova interpolaciona formula, a (9) druga NEWTONova interpolaciona formula.

Formula za grešku koja je važila za LAGRANGEovu interpolacionu formulu ostaje u važnosti i za NEWTONovu interpolacionu formulu. Zaista, polinom (6), odnosno (8), odnosno (9), je u stvari LAGRANGEov interpolacioni polinom predstavljen u drugačijoj formi.

U numeričkim tablicama vrednosti agrumenta x_i su ekvidistantne. Zato je za primenu interpolacionih formula celishodno obrazovati shemu koja sadrži agrumente x_i, vrednosti funkcije y_i i razlike prvog, drugog, ... reda. Red razlike označen je gornjim indeksom, a donji indeks označava mesto razlike u odnosu na tablične vrednosti:

x_{-1}	y_{-1}				
		Δ_{-10}			
x_0	y_0		Δ_0^2		
		Δ_{01}		Δ_{01}^3	
x_1	y_1		Δ_1^2		Δ_1^4
		Δ_{12}		Δ_{12}^3	
x_2	y_2		Δ_2^2		
		Δ_{23}			
x_3	y_3				

Ovde je $\Delta_{01}=y_1-y_0$, $\Delta_1^2=\Delta_{12}-\Delta_{01}$, itd.

Neka je: x agrument za koji se traži vrednost funkcije, x_0 prvi manji argument u tablici, x_1 prvi veći argument u tablici i $d=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$. Vrednost funkcije y data je sledećim oblikom NEWTONove interpolacione formule:

$$y(x)=y_0+d\Delta_{01}-\frac{d(1-d)}{2}\Delta_1^2+\frac{d(1-d)(2-d)}{6}\Delta_{12}^3-\cdots$$

$$=y_0+d\Delta_{01}-N_2\Delta_1^2+N_3\Delta_{12}^3-\cdots$$

Često se upotrebljava i BESSELova interpolaciona formula

$$y(x)=y_0+d\Delta_{01}-\frac{d(1-d)}{4}(\Delta_0^2+\Delta_1^2)+\frac{d(1-d)\left(\frac{1}{2}-d\right)}{6}\Delta_{01}^3-\cdots$$

$$=y_0+d\Delta_{01}-B_2(\Delta_0^2+\Delta_1^2)+B_3\Delta_{01}^3-\cdots$$

Koeficijenti $N_2=N_2(d)$ i $N_3=N_3(d)$, odnosno $B_2=B_2(d)$ i $B_3=B_3(d)$, obično su tabelirani i priloženi tablicama sa većim brojem decimala.

PRIMER 1. Pomoću ovih formula izračunaćemo $\log_{10} 101.20$ koristeći logaritamske tablice sa deset decimala:

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$x_{-1}=100$	$y_{-1}=2.00000\,00000$				
		0.00432 13738			
$x_0=101$	$y_0=2.00432\,13738$		−0.00004 25758		
		0.00427 87980		$8307\cdot10^{-5}$	
$x_1=102$	$y_1=2.00860\,01718$		−0.00004 17451		$-239\cdot10^{-5}$
		0.00423 70529		$8068\cdot10^{-5}$	
$x_2=103$	$y_2=2.01283\,72247$		−0.00004 09383		
		0.00419 61146			
$x_3=104$	$y_3=2.01703\,33393$				

Razlika agrumenata x za koji se traži funkcija y i tablične prve manje vrednosti argumenta x_0 je $d=0.20$.

NEWTONova interpolaciona formula daje:

$\log_{10} 101$	2.00432 13738
$+d\Delta_{01}$	85 57596
$-N_2\Delta_1^2$	33396 08
$+N_3\Delta_{12}^3$	387 264
$y(x)$	≈2.00518 05117 3

Prema BESSELovoj interpolacionoj formuli je:

$\log_{10} 101$	2.00432 13738
$+d\Delta_{01}$	85 57596
$-B_2(\Delta_0^2+\Delta_1^2)$	33728 36
$+B_3\Delta_{01}^3$	66 456
$y(x)$	≈2.00518 05128 8

Tačna vrednost $\log_{10} 101.20$ na deset decimala je: 2.00518 05125.

4. RACIONALNE FUNKCIJE

4.1. DEFINICIJE

Definicija 1. *Ako su P i Q dva proizvoljna realna polinoma definisana sa*

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k x^{m-k},\quad Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^{n-k}\quad (\alpha_0,\ \beta_0\neq 0),$$

tada se $x\mapsto\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *naziva realna racionalna funkcija.*

PRIMEDBA 1. Analogno gornjem, uzimajući da su $P(z)$ i $Q(z)$ kompleksni polinomi, definiše se kompleksna racionalna funkcija. Međutim, ograničićemo se samo na slučaj kada su P i Q realni polinomi.

Definicija 2. *Funkcija* $x\mapsto\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *naziva se nesvodljiva racionalna funkcija ako su polinomi* $P(x)$ *i* $Q(x)$ *relativno prosti, tj. ako nemaju zajednički faktor* $r(x)\neq\text{const.}$

U daljem izlaganju pretpostavićemo da je $x\mapsto\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nesvodljiva racionalna funkcija. Takođe možemo pretpostaviti da je $\alpha_0=1$. Ovim dvema pretpostavkama ne umanjuje se generalnost izlaganja koje se ima u vidu.

Definicija 3. *Kada je* $\operatorname{dg}P(x)<\operatorname{dg}Q(x)$, *tada se* $x\mapsto\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *naziva prava racionalna funkcija. Inače, racionalna funkcija je neprava.*

Svaka neprava racionalna funkcija može se predstaviti kao zbir jednog polinoma i prave racionalne funkcije. Do ovoga se dolazi ako se izvrši deljenje polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$.

Definicija 4. *Pod prostim ili parcijalnim razlomkom smatra se funkcija oblika*

$$x\mapsto\frac{A}{(x-a)^k}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

gde su A i a konstante.

U polju realnih brojeva pod prostim ili parcijalnim razlomkom smatra se takođe funkcija

$$x\mapsto\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots;\ p^2-4q<0),$$

gde su M, N, p, q realni brojevi.

U daljem izlaganju zadržaćemo se na funkcijama oblika

$$x\mapsto\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ relativno prosti polinomi, $\alpha_0,\ \beta_0\neq 0$ i $\operatorname{dg}P(x)<\operatorname{dg}Q(x)$. Dakle, imaćemo posla sa pravim nesvodljivim racionalnim funkcijama.

4.2. RAZLAGANJE PRAVE RACIONALNE FUNKCIJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE

Stav 1. *Svaka nesvodljiva prava racionalna funkcija jedne promenljive može se razložiti, na jedinstven način*[1], *u zbir od konačno mnogo parcijalnih razlomaka.*

Dokaz. Neka je

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k x^{m-k}\quad(\beta_0\neq 0;\ m\geq 0),$$

$$Q(x)=x^n+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x^{n-k}\quad(n>m).$$

Ako je a jedna nula reda ν polinoma $Q(x)$, tada je

$$Q(x)=(x-a)^{\nu}Q_1(x)\quad (Q_1(a)\neq 0),$$

gde polinom $Q_1(x)$ osim $x=a$ ima sve nule istog reda kao i polinom Q.

Posmatrajmo razliku

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\nu}Q_1(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^{\nu}},\quad \text{tj.}\quad \frac{P(x)-A_1Q_1(x)}{(x-a)^{\nu}Q_1(x)},$$

gde je A_1 privremeno neodređena konstanta.

Izaberimo A_1 tako da $P(x)-A_1Q_1(x)$ bude deljivo sa $x-a$. Ovaj slučaj nastupa ako je $x=a$ nula polinoma

$$P(x)-A_1Q_1(x),\quad \text{tj. ako je}\quad P(a)-A_1Q_1(a)=0.$$

Odavde sleduje $A_1=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Na taj način dobijamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^{\nu}}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)},$$

gde je $P_1(x)$ polinom koji se dobija deljenjem polinoma $P(x)-A_1Q_1(x)$ sa $x-a$.

Ako na pravu racionalnu funkciju $x\mapsto\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)}$ primenimo navedeni postupak, nalazimo

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)}-\frac{A_2}{(x-a)^{\nu-1}}=\frac{P_1(x)-A_2Q_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)}.$$

[1] Smatra se da su sv razlomci oblika $\dfrac{A_r}{(x-a)^k}$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ svedeni na jedan razlomak ovog oblika. Na primer, $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}$.

Izaberemo li A_2 tako da je $P_1(a)-A_2Q_1(a)=0$, razlomak na desnoj strani poslednjeg identiteta postaje

$$\frac{P_2(x)}{(x-a)^{\nu-2}Q_1(x)},$$

gde je polinom $P_2(x)$ rezultat deljenja $P_1(x)-A_2Q_1(x)$ sa $x-a$.

Produžujući postupak, dolazimo najzad do identiteta

$$\frac{P_{\nu-1}(x)}{(x-a)Q_1(x)}-\frac{A_\nu}{x-a}=\frac{P_{\nu-1}(x)-A_\nu Q_1(x)}{(x-a)Q_1(x)}.$$

Ako A_ν izaberemo tako da je $A_\nu=\frac{P_{\nu-1}(a)}{Q_1(a)}$, dobijamo

$$\frac{P_{\nu-1}(x)}{(x-a)Q_1(x)}-\frac{A_\nu}{x-a}=\frac{P_\nu(x)}{Q_1(x)},$$

gde je $P_\nu(x)$ rezultat deljenja $P_{\nu-1}(x)-A_\nu Q_1(x)$ sa $x-a$.

Dakle, jedno za drugim došli smo do identiteta:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^\nu}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)},$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\nu-1}Q_1(x)}-\frac{A_2}{(x-a)^{\nu-1}}=\frac{P_2(x)}{(x-a)^{\nu-2}Q_1(x)},$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_{\nu-1}(x)}{(x-a)Q_1(x)}-\frac{A_\nu}{x-a}=\frac{P_\nu(x)}{Q_1(x)}.$$

Iz ovih identiteta, posle sabiranja, sleduje

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^\nu}+\frac{A_2}{(x-a)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{A_\nu}{x-a}+\frac{P_\nu(x)}{Q_1(x)},$$

gde je $Q_1(x)$ polinom stepena $n-\nu$.

Ako je b druga nula polinoma $Q(x)$ odnosno nula polinoma $Q_1(x)$ reda μ, na analogni način dobijamo

$$\frac{P_\nu(x)}{Q_1(x)}=\frac{B_1}{(x-b)^\mu}+\frac{B_2}{(x-b)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{B_\mu}{x-b}+\frac{P_{\nu\mu}(x)}{Q_2(x)},$$

gde je

$$Q_1(x)=(x-b)^\mu Q_2(x)\quad (Q_2(b)\neq 0).$$

Dakle, ako je

$$Q(x)=(x-a_1)^{\nu_1}\cdots(x-a_k)^{\nu_k}\quad \Big(\sum_{r=1}^{k}\nu_r=n;\ \ a_i\neq a_j,\ i\neq j\Big),$$

tada se prava racionalna funkcija

$$x\mapsto\frac{P(x)}{Q(x)}\quad (P(x)\text{ i }Q(x)\text{ relativno prosti polinomi})$$

može predstaviti u obliku

$$\text{(1)}\qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\nu_1}}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\nu_1-1}}+\cdots+\frac{A_{1\nu_1}}{x-a_1}$$
$$+\frac{A_{21}}{(x-a_2)^{\nu_2}}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^{\nu_2-1}}+\cdots+\frac{A_{2\nu_2}}{x-a_2}$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{A_{k1}}{(x-a_k)^{\nu_k}}+\frac{A_{k2}}{(x-a_k)^{\nu_k-1}}+\cdots+\frac{A_{k\nu_k}}{x-a_k}.$$

Ako polinom $Q(x)$ ima imaginarnu nulu a reda k, njena konjugovana vrednost $\bar a$ takođe je nula istog reda polinoma $Q(x)$.

Dokazaćemo da paru nula a, $\bar a$ (red ovih nula je $k\leq[n/2]$) u (1) odgovara

$$\text{(2)}\qquad \sum_{r=1}^{k}\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}\qquad (p=-a-\bar a,\ q=a\bar a),$$

gde su p, q, M_r, N_r realni brojevi.

U posmatranom slučaju polinom $Q(x)$ može se predstaviti u obliku

$$Q(x)=(x^2+px+q)^kQ_1(x),$$

gde polinom $Q_1(x)$ nije deljiv realnim polinomom x^2+px+q sa imaginarnim nulama. Odgovarajući identitet ima oblik

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^kQ_1(x)}-\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}=\frac{P(x)-(M_1x+N_1)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^kQ_1(x)}.$$

Neka su $Ax+B$ i $Cx+D$ redom ostaci pri deljenju polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ sa x^2+px+q.

Polinom

$$(Ax+B)-(M_1x+N_1)(Cx+D)\qquad (|C|+|D|>0),$$

tj.

$$-CM_1x^2+(A-DM_1-CN_1)x+(B-DN_1)$$

deljiv je sa x^2+px+q ako i samo ako su ispunjeni uslovi

$$-CM_1=\frac{A-DM_1-CN_1}{p}=\frac{B-DN_1}{q},$$

tj.

$$\text{(3)}\qquad (D-Cp)M_1+CN_1=A,\quad -CqM_1+DN_1=B.$$

Ako je $C\neq 0$, determinanta ovog sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix}D-Cp & C\\ -Cq & D\end{vmatrix}=C^2q+D^2-CDp$$

može se predstaviti u obliku $C^2\Big[\Big(-\frac{D}{C}\Big)^2+p\Big(-\frac{D}{C}\Big)+q\Big]$.

Ovo je, u stvari, vrednost polinoma

$$C^2(x^2+px+q)\qquad \text{za } x=-\frac{D}{C}$$

i ona nije jednaka nuli jer je x^2+px+q, po pretpostavci, polinom čije nule nisu realne, a broj $-\frac{D}{C}$ je realan.

Za $C=0$ determinanta Δ se svodi na $-D^2$. Kako $Q_1(x)$ nije deljiv sa x^2+px+q, biće $D\neq 0$.

Iz sistema (3) određujemo M_1 i N_1 i za te vrednosti polinom

$$P(x)-(M_1x+N_1)\,Q_1(x)$$

deljiv je sa x^2+px+q. Rezultat deljenja je polinom $P_1(x)$ čiji je stepen za 2 manji od stepena polinoma $P(x)-(M_1x+N_1)\,Q_1(x)$.

Primenom navedenog postupka na racionalnu funkciju

$$x\mapsto\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\,Q_1(x)}$$

dolazi se do razlaganja ove funkcije u zbir

$$\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{k-2}\,Q_1(x)},$$

gde su M_2 i N_2 konstante koje su tako određene da polinom

$$P(x)-(M_2x+N_2)\,Q_1(x)$$

bude deljiv sa x^2+px+q. Rezultat deljenja je polinom $P_2(x)$, čiji je stepen za 2 manji od stepena polinoma $P_1(x)-(M_2x+N_2)\,Q_1(x)$.

Daljom primenom ovog postupka utvrđujemo da paru konjugovano-kompleksnih nula reda k polinoma $Q(x)$ zaista odgovara izraz oblika (2).

Prema tome, dokazali smo da:

1° jednoj realnoj nuli a reda k polinoma $Q(x)$ odgovara izraz oblika

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}\qquad(A_1\neq 0);$$

2° jednom paru a, $\bar{a}$ konjugovano-kompleksnih nula reda k realnog polinoma $Q(x)$ odgovara izraz

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}\qquad(|M_1|+|N_1|>0).$$

Sada ćemo dokazati da se svaka racionalna funkcija može razložiti, na jedinstven način, na parcijalne razlomke.

Pretpostavimo da postoji, osim razlaganja (1), još jedno razlaganje

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{B_{11}}{(x-a_1)^{\nu_1}}+\frac{B_{12}}{(x-a_1)^{\nu_1-1}}+\cdots+\frac{B_{1\nu_1}}{x-a_1}\\&+\frac{B_{21}}{(x-a_2)^{\nu_2}}+\frac{B_{22}}{(x-a_2)^{\nu_2-1}}+\cdots+\frac{B_{2\nu_2}}{x-a_2}\\&+\cdots\\&+\frac{B_{k1}}{(x-a_k)^{\nu_k}}+\frac{B_{k2}}{(x-a_k)^{\nu_k-1}}+\cdots+\frac{B_{k\nu_k}}{x-a_k},\end{aligned}$$

gde je

$$(5)\qquad B_{rs_r}\neq A_{rs_r}$$

bar za jedan par indeksa r i s_r koji uzimaju vrednost $r=1,\ldots,k$ i $s_r=1,\ldots,\nu_r$.

Iz (1) i (4) neposredno izlazi

$$(6)\qquad \begin{aligned}&A_{11}+A_{12}(x-a_1)+\cdots+A_{1\nu_1}(x-a_1)^{\nu_1-1}+f(x)(x-a_1)^{\nu_1}\\&=B_{11}+B_{12}(x-a_1)+\cdots+B_{1\nu_1}(x-a_1)^{\nu_1-1}+g(x)(x-a_1)^{\nu_1},\end{aligned}$$

gde su f i g dve racionalne funkcije, konačne za $x=a_1$.

Iz (6) za $x=a_1$ sleduje $A_{11}=B_{11}$.

Identitet (6) sada dobija oblik:

$$\begin{aligned}&A_{12}+A_{13}(x-a_1)+\cdots+A_{1\nu_1}(x-a_1)^{\nu_1-2}+f(x)(x-a_1)^{\nu_1-1}\\&=B_{12}+B_{13}(x-a_1)+\cdots B_{1\nu_1}(x-a_1)^{\nu_1-2}+g(x)(x-a_1)^{\nu_1-1}.\end{aligned}$$

Za $x=a_1$ odavde izlazi $A_{12}=B_{12}$.

Produžujući na ovaj način, dokazujemo da je

$$A_{rs_r}=B_{rs_r}\qquad(r=1,\ldots,k;\ s_r=1,\ldots,\nu_r),$$

što je u protivrečnosti sa (5).

Ovim smo dokazali da je razlaganje (1) jedinstveno.

PRIMER 1. Na funkciju

$$x\mapsto\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}$$

primenimo navedeni postupak razlaganja.

Posmatrajmo identitet

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}-\frac{A}{x-1}=\frac{(x+2)-A(x-2)^2}{(x-1)(x-2)^2}$$

i odredimo A iz uslova da $x=1$ bude nula polinoma $x+2-A(x-2)^2$.

Na taj način dobijamo $A=3$ i navedeni identitet postaje

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}-\frac{3}{x-1}=\frac{-3x+10}{(x-2)^2}.$$

Kako je

$$\frac{-3x+10}{(x-2)^2}=\frac{-3(x-2)+4}{(x-2)^2},$$

traženo razlaganje je

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}.$$

U praksi se obično ne primenjuje navedeni postupak razlaganja racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Na sledećem primeru biće ilustrovana dva metoda koja se često primenjuju.

PRIMER 2. Racionalna funkcija

$$x\mapsto\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$$

razlaže se na jedinstven način na zbir funkcija oblika

$$x \mapsto \frac{A}{x-1}, \quad x \mapsto \frac{B}{x+1}, \quad x \mapsto \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}, \quad x \mapsto \frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Posle množenja sa $(x^2-1)(x^2+1)^2$, identitet

(1) $$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

postaje

$$x+2=A(x+1)(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+(Cx+D)(x^2-1)+(Ex+F)(x^4-1).$$

Identifikacijom koeficijenata jednakih potencija odavde se dobija sistem linearnih jednačina:

$$A+B+E=0, \quad A-B+F=0, \quad 2A+2B+C=0,$$

$$2A-2B+D=0, \quad A+B-C-E=1, \quad A-B-D-F=2,$$

iz koga sleduje

$$A=\frac{3}{8}, \quad B=-\frac{1}{8}, \quad C=-\frac{1}{2}, \quad D=-1, \quad E=-\frac{1}{4}, \quad F=-\frac{1}{2}.$$

Ovaj način nije praktičan ako je stepen polinoma $Q(x)$ veliki.

Drugi način razlaganja sastoji se iz sledećeg.

Ako levu i desnu stranu identiteta (1) pomnožimo sa $x-1$ $(x\neq 1)$, dobijamo

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}=A+(x-1)\left(\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\right).$$

Pustimo li da $x\to 1$, iz poslednje jednakosti sleduje $A=\frac{3}{8}$.

Pomnožimo li levu i desnu stranu jednakosti (1) sa $x+1$ $(x\neq -1)$ i pustimo zatim da $x\to -1$, dobijamo $B=-\frac{1}{8}$.

Koeficijente C i D odredićemo ako levu i desnu stranu jednakosti (1) pomnožimo sa $(x^2+1)^2$ i pustimo potom da $x\to i$. Tako se dobija

$$\lim_{x\to i}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to i}(Cx+D) \Rightarrow -\frac{1}{2}(i+2)=Ci+D.$$

Odavde izlazi $C=-\frac{1}{2}$, $D=-1$.

Prema tome, dobili smo

$$\frac{Ex+F}{x^2+1}=\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}-\frac{\frac{3}{8}}{x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Odavde sleduje $E=-\frac{1}{4}$, $F=-\frac{1}{2}$.

Zadaci za rešavanje

1. Razložiti na parcijalne razlomke funkciju $x\mapsto \frac{1}{x^5-1}$.

Uputstvo. x^5-1 može se predstaviti u obliku proizvoda

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

$x^4+x^3+x^2+x+1$ može se faktorisati na sledeći način. Polazeći od reprezentacije

$$x^4+x^3+x^2+x+1=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1\right) \quad (x\neq 0)$$

i stavljajući

(1) $$x+\frac{1}{x}=y \quad (x\neq 0)$$

dobijamo

(2) $$x^4+x^3+x^2+x+1=x^2(y^2+y-1)=x^2(y-y_1)(y-y_2),$$

gde su y_1 i y_2 nule polinoma y^2+y-1.

Prema (1) identitet (2) postaje

$$x^4+x^3+x^2+x+1=x^2\left(x+\frac{1}{x}-y_1\right)\left(x+\frac{1}{x}-y_2\right)$$

$$=(x^2-y_1x+1)(x^2-y_2x+1).$$

2. Proveriti razlaganja:

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+4}{(x-2)^3(x+3)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{2}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2};$$

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2-x+1)}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2-x+1};$$

$$\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{x-3}{x^2+x+1}+\frac{x-4}{(x^2+x+1)^2};$$

$$\frac{3}{4x^3+8x^2+3x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{2x+1}+\frac{1}{2x+3};$$

$$\frac{2x^4-x^3-5x^2+2x+4}{(x^2-4)(2x-1)}=x+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x-1};$$

$$\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}.$$

3. Dokazati da važe razlaganja:

$$\frac{2n+1}{x^{2n+1}-1}=\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}-1}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1},$$

$$\frac{n}{x^{2n}-1}=\frac{1}{x^2-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}.$$

A: 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.10, 12.11, 12.13.

NEJEDNAKOSTI

1. OPŠTI STAVOVI O NEJEDNAKOSTIMA

1.1. DEFINICIJE I STAVOVI O NEJEDNAKOSTIMA

Definicija 1. *Ako su a i b dva različita realna broja i ako je njihova razlika $a-b$ pozitivna, tada je a veće od b, u oznaci $a>b$, tj. b manje od a, u oznaci $b<a$.*

Posebno, svaki pozitivan broj je veći od 0, jer ako je a pozitivan broj, razlika $a-0$ je pozitivna, što se prema prethodnom označava $a>0$.

Stav 1. *Između dva realna broja a i b postoji samo jedna od relacija:*

$$a>b, \quad a=b \quad \text{ili} \quad a<b.$$

Neka su n, p, q prirodni brojevi i $a, b, c; a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ realni brojevi. Tada važe sledeći stavovi:

Stav 2. $(a>b \wedge b>c) \Rightarrow a>c.$

Stav 3. $(a>b \wedge c>0) \Rightarrow ac>bc.$

Stav 4. $(a>b \wedge c<0) \Rightarrow ac<bc.$

Stav 5. $(a>b \wedge c=0) \Rightarrow ac=bc.$

Stav 6. $(a>b \wedge c \in \mathbf{R}) \Rightarrow a+c>b+c.$

Stav 7. $(a>b>0) \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b},$

$(a<b<0) \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$

Stav 8. $(a_1>b_1 \wedge a_2>b_2) \Rightarrow a_1+a_2>b_1+b_2.$

Stav 9. $(a_k>b_k,\ k=1, \ldots, n) \Rightarrow a_1+\cdots+a_n>b_1+\cdots+b_n.$

Stav 10. $(a>b \wedge c<d) \Rightarrow a-c>b-d.$

Stav 11. $(a>b \wedge c>d \wedge b>0 \wedge c>0) \Rightarrow ac>bd,$

$(a>b \wedge c>d \wedge a>0 \wedge d>0) \Rightarrow ac>bd.$

Stav 12. $(a_k>b_k>0,\ k=1, \ldots, n) \Rightarrow a_1\cdots a_n>b_1\cdots b_n.$

Stav 13. $(a>b>0) \Rightarrow a^n>b^n \wedge \frac{1}{a^n}<\frac{1}{b^n}.$

Stav 14. $(a>0>b) \Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}.$

Stav 15. $(a>b>0) \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$

Stav 16. $(a>b>0) \Rightarrow a^{p/q}>b^{p/q}.$

Stav 17. $(a>b>0 \wedge x>0) \Rightarrow a^x>b^x.$

Primera radi dokazaćemo stavove 11, 15, 16 i 17.

Dokaz stava **11.** Razlika $ac-bd$ može se napisati na sledeća dva načina:

$$ac-bd=(a-b)c+(c-d)b$$
$$=(a-b)d+(c-d)a,$$

odakle se neposredno izvodi stav 11.

Stav 11 može se i ovako dokazati.

Prema pretpostavci je $b>0$, $c>0$, $a>b$, $c>d$, pa se primenom stava 3 dobija

$$ac>bc, \quad bc>bd.$$

Na osnovu stava 2 iz poslednjih nejednakosti sleduje

$$ac>bd,$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz stava **15.** Pretpostavimo da je

$$\sqrt[n]{a} \leqq \sqrt[n]{b} \text{ pri uslovu } a>b>0.$$

Prema stavu 13 je $a \leqq b$, što je u protivrečnosti sa uslovom $a>b>0$.

Ovim smo dokazali stav 15.

Dokaz stava **16.** Budući da je $a>b>0$, na osnovu stava 13 imamo $a^p>b^p$. Odavde, prema stavu 15, izlazi

$$\sqrt[q]{a^p}>\sqrt[q]{b^p},$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz stava **17.** Tvrđenje stava 17 proizilazi iz tvrđenja stava 16 i činjenice da je $x \mapsto a^x$ $(a>0)$ monotona i neprekidna funkcija.

Teorija nejednakosti zasnovana je na teoriji realnih brojeva. Nejednakosti su aksiomatski obrađene, na primer, u knjizi:

E. Landau: *Grundlagen der Analysis.* New York 1948.

1.2. NEJEDNAKOSTI SA MODULIMA REALNIH BROJEVA

Definicija 1. *Pod modulom ili apsolutnom vrednošću realnog broja a, u oznaci $|a|$, podrazumeva se*

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

Za module realnih brojeva važe sledeći stavovi:

Stav 1. $|ab|=|a|\,|b|.$

Stav 2. $\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right|=\prod_{k=1}^{n} |a_k|.$

Stav 3. $|a+b| \leqq |a|+|b|$.

Stav 4. $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Stav 5. $\big||a|-|b|\big| \leqq |a+b|$.

Stav 6. $(|a|-|b|)^2 \leqq |a^2-b^2|$.

Stav 7. $\left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right| \leqq \sqrt{|a-b|}$.

***Dokaz stava* 3.** Najpre dokažimo nejednakosti

(1) $\qquad -|a| \leqq a \leqq |a|,$

tj.

(2) $\qquad -|a| \leqq a, \quad a \leqq |a|.$

Za $a \geqq 0$, prva od ovih nejednakosti postaje $-a \leqq a$, i ona je istinita. Druga ima oblik $a \leqq a$, i ona je takođe istinita.

Za $a \leqq 0$ nejednakosti (1), tj. (2), takođe su istinite.

Kako je

$$-|a| \leqq a \leqq |a|, \quad -|b| \leqq b \leqq |b|,$$

posle sabiranja dobija se

$$-(|a|+|b|) \leqq a+b \leqq |a|+|b|,$$

tj.

(3) $\qquad |a+b| \leqq |a|+|b|.$

Ako su brojevi a i b istog znaka, u (3) važi jednakost. Jednakost takođe važi ako je jedan od brojeva a ili b jednak 0.

PRIMEDBA 1. Nejednakosti

$$|a| \leqq k \quad \text{i} \quad -k \leqq a \leqq k \qquad (k>0)$$

su ekvivalentne jer važe implikacije

$$\left.\begin{array}{l} |a| \leqq k \ \ (a \geqq 0) \Rightarrow a \leqq k \\ |a| \leqq k \ \ (a \leqq 0) \Rightarrow -a \leqq k \Rightarrow -k \leqq a \end{array}\right\} \Rightarrow -k \leqq a \leqq k;$$

$$-k \leqq a \leqq k \Rightarrow |a| \leqq k.$$

***Dokaz stava* 5.** Kako je

$$a=(a+b)-b, \quad b=(a+b)-a,$$

na osnovu stava 3 je

$$|a|=|(a+b)-b| \leqq |a+b|+|-b|=|a+b|+|b|,$$
$$|b|=|(a+b)-a| \leqq |a+b|+|-a|=|a+b|+|a|,$$

odakle redom sleduje

$$|a|-|b| \leqq |a+b|, \qquad -(|a|-|b|) \leqq |a+b|,$$
$$-|a+b| \leqq |a|-|b|, \qquad |a|-|b| \leqq |a+b|,$$
$$-|a+b| \leqq |a|-|b| \leqq |a+b|.$$

Ove se nejednakosti mogu kraće predstaviti u obliku

(4) $\qquad \big||a|-|b|\big| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|.$

***Dokaz stava* 6.** Može se pretpostaviti da je $|a| \geqq |b|$, te nejednakost ostaje nepromenjena ako se a i b međusobno izmene. Dakle, treba dokazati

$$(|a|-|b|)^2 \leqq a^2-b^2 \Rightarrow |b|(|a|-|b|) \geqq 0.$$

Ova nejednakost je istinita jer je $|b| \geqq 0$ i prema pretpostavci

$$|a|-|b| \geqq 0.$$

***Dokaz stava* 7.** Prema stavu 6, za $a=\sqrt{|p|}$ i $b=\sqrt{|q|}$ (p, q realni), imamo

$$\left(\sqrt{|p|}-\sqrt{|q|}\right)^2 \leqq \big||p|-|q|\big|$$

i prema stavu 5

$$\left|\sqrt{|p|}-\sqrt{|q|}\right| \leqq \sqrt{|p-q|}.$$

1.3. NEJEDNAKOSTI SA MODULIMA KOMPLEKSNIH BROJEVA

Stav 1. *Za proizvoljne kompleksne brojeve z_1 i z_2 važe nejednakosti*

(1) $\qquad \big||z_1|-|z_2|\big| \leqq |z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|.$

U levoj nejednakosti jednakost važi ako i samo ako je $z_1\bar{z}_2$ realno i $z_1\bar{z}_2 \leqq 0$. U desnoj nejednakosti jednakost važi ako i samo ako je $z_1\bar{z}_2$ realno i $z_1\bar{z}_2 \geqq 0$.

Dokaz. Kako je

(2) $$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2),$$

kao i

$$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|=\sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2+(\mathrm{Im}\, z)^2} \ \text{ i } \ |\bar{z}|=|z|,$$

dobija se

$$|z_1+z_2|^2 \leqq |z_1|^2+2\,|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2.$$

Odavde sleduje

(3) $\qquad |z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|.$

Ovo je nejednakost trougla. Geometrijsku interpretaciju ove nejednakosti dali smo u Uvodu, 3.13.1.

Dokazaćemo sada da je

(4) $\qquad |z_1-z_2| \geqq \big||z_1|-|z_2|\big|.$

2. METODI ZA DOKAZIVANJE NEJEDNAKOSTI

Na primerima ćemo izložiti neke od važnijih metoda koji se koriste pri dokazivanju nejednakosti.

2.1. PRIMENA OSNOVNIH OSOBINA NEJEDNAKOSTI

PRIMER 1.

(1) $$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \qquad (0<b\leqq a).$$

Dokaz. Nejednakost (1) ekvivalentna je sa

(2) $$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Kako je $0<b\leqq a$, iz (2) sleduje ekvivalentna nejednakost

(3) $$\frac{1}{2}\frac{a-b}{\sqrt{a}} \leqq \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \left(\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}} \leqq 0\right),$$

koja je očevidna.

U (3) važi jednakost ako i samo ako je $b=a$.

Ovim je dokazana nejednakost (1).

PRIMER 2.

$$(1+a)^{1-a}(1-a)^{1+a} < 1 < (1+a)^{1+a}(1-a)^{1-a} \qquad (0<a<1).$$

Dokaz. Kako je $0<a<1$, biće $1-a<\frac{1}{1+a}$ i $0<\frac{1-a}{1+a}<1$, pa je

$$(1+a)^{1-a}(1-a)^{1+a} < (1+a)^{1-a}(1-a)^{a}\frac{1}{1+a} = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{a} < 1,$$

$$(1-a)^{1-a}(1+a)^{1+a} > (1+a)^{1-a}(1+a)^{a}\frac{1}{1-a} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{a} > 1.$$

Ovim su date nejednakosti dokazane.

2.2. ISPITIVANJE ZNAKA KVADRATNOG TRINOMA

PRIMER 1.

(1) $$(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd) \qquad (b<c<d \vee d<c<b).$$

Dokaz. Nejednakost (1) ekvivalentna je sa

(2) $$a^2+2(b-3c+d)a+(b+c+d)^2-8bd>0.$$

Diskriminanta kvadratnog trinoma po a na levoj strani nejednakosti (2) je

$$D=4\big((b-3c+d)^2-(b+c+d)^2+8bd\big)=32(b-c)(d-c).$$

Nejednakost (2) važi za svako a ako i samo ako je

$$(b-c)(d-c)<0 \ \Leftrightarrow\ b<c<d \vee d<c<b.$$

PRIMER 2. Ako je

(1) $$y=\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2},$$

tada je

(2) $$\min\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right) \leqq y \leqq \max\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right) \qquad (0<|m|<|p|),$$

(3) $$y \leqq \min\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right), \quad \text{ili} \quad y \geqq \max\left(\frac{p-m}{p+m},\ \frac{p+m}{p-m}\right) \qquad (0<|p|<|m|).$$

Dokaz. Ako je $m=0$, tada je $y=1$. Pretpostavimo da je $m\neq 0$ i predstavimo (1) u obliku

$$(y-1)x^2+2m(y+1)x+p^2(y-1)=0.$$

Vrednosti x, određene ovim uslovom, realne su ako i samo ako je

$$(m^2-p^2)y^2+2(m^2+p^2)y+m^2-p^2\geqq 0.$$

Pretpostavimo da je $|m|\neq|p|$. Najpre imamo

$$(m^2-p^2)y^2+2(m^2+p^2)y+m^2-p^2=(m^2-p^2)(y-y_1)(y-y_2),$$

gde je

$$y_1=\frac{p-m}{p+m}, \qquad y_2=\frac{p+m}{p-m}.$$

Ako je $mp>0$ i $0<|m|<|p|$, tada je

$$\frac{p-m}{p+m}\leqq y\leqq\frac{p+m}{p-m}.$$

Ako je $mp\leqq 0$ i $0<|m|<|p|$, tada je

$$\frac{p+m}{p-m}\leqq y\leqq\frac{p-m}{p+m}.$$

Ako je $0<|p|<|m|$ i $mp>0$, tada je

$$y\leqq\frac{p+m}{p-m} \quad \text{ili} \quad y\geqq\frac{p-m}{p+m}.$$

Ako je $0<|p|<|m|$ i $mp<0$, tada je

$$y \leqq \frac{p-m}{p+m} \quad \text{ili} \quad y \geqq \frac{p+m}{p-m},$$

što zajedno sa prethodnim nejednakostima dokazuje (2) i (3).

2.3. MATEMATIČKA INDUKCIJA

PRIMER 1.

(1) $$\frac{1}{\sqrt{4n}} \leqq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Dokaz. Nejednakost (1) je tačna za $n=1$ jer se svodi na $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Pretpostavimo da je nejednakost (1) tačna za neko $n \geqq 1$. Tada važi i

(2) $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \geqq \frac{1}{\sqrt{4n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \geqq \frac{1}{\sqrt{4n+4}}$$

jer je

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{4n+4}} \iff 4n^2+4n+1 \geqq 4n^2+4n.$$

Iz (2) zaključujemo da nejednakost (1) važi za $n+1$ ako važi za n. Ovim je nejednakost (1) dokazana matematičkom indukcijom.

PRIMER 2.

(1) $2^n > n \quad (n=0, 1, \ldots).$

Dokaz. Označimo sa $P(n)$ tvrđenje (1). $P(0)$ je tačno jer je $2^0>0$, tj. $1>0$. Pretpostavimo da je $P(n)$ tačno za neko $n (\geqq 0)$, tj.

(2) $2^n > n.$

Kako je

(3) $2^n \geqq 1 \quad (n \geqq 0),$

posle sabiranja (2) i (3) imamo

$$2 \cdot 2^n > n+1 \Rightarrow 2^{n+1} > n+1 \quad (\text{za neko } n \geqq 0).$$

Prema tome, dokazali smo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2.4. ISPITIVANJE FUNKCIJA

Ovaj metod ima više varijanata. Jedna od najčešćih se svodi na ispitivanje znaka prvog izvoda.

PRIMER 1.

(1) $\log_x(x+1) > \log_y(y+1) \quad (1<x<y).$

Dokaz. Funkcija f data sa

$$f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\log(x+1)}{\log x} \quad (x>1),$$

ima prvi izvod

$$f'(x) = \frac{x \log x - (x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2},$$

koji je negativan za $x>1$.

Prema tome, funkcija f opada za $x>1$, te je

$$f(x) > f(y) \quad (1<x<y),$$

tj.

(2) $\log_x(x+1) > \log_y(y+1) \quad (1<x<y).$

Na primer, za $x=2$ i $y=3$ dobijamo nejednakost

$$\log_2 3 > \log_3 4.$$

PRIMER 2.

(1) $\log x - x + 1 \leqq 0 \quad (x>0).$

Dokaz. Funkcija f data sa

$$f(x) = \log x - x + 1,$$

definisana je i neprekidna za $x>0$.

Kako je

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

f' se anulira jedino za $x=1$ i za tu vrednost f ima maksimum. Prema tome, važi nejednakost

$$f(x) \leqq f(1) = 0 \quad (x>0),$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x=1$.

Ovim je nejednakost (1) dokazana.

PRIMER 3.

(1) $x^s |\log x| \leqq \frac{1}{se} \quad (s>0;\ 0<x<1).$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju f, definisanu pomoću

(2) $f(x) = x^s |\log x| \quad (s>0).$

Za $0<x<1$ iz (2) dobijamo

$$f'(x) = -x^{s-1}(s \log x + 1), \quad f''(x) = -x^{s-2}\big(s(s-1)\log x + 2s - 1\big).$$

Kako je $f'(e^{-\frac{1}{s}}) = 0$, $f''(e^{-\frac{1}{s}}) < 0$, funkcija f ima maksimum

$$f(e^{-\frac{1}{s}}) = \frac{1}{se}.$$

Kako je $f(1)=0$ i $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$, nejednakost (1) je dokazana.

PRIMER 4.

(1) $(a+x)^a < a^{a+x} \quad (a \geqq e,\ x>0).$

Dokaz. Za funkciju f datu sa

$$f(x) = a^{1+\frac{x}{a}} - a - x \quad (a \geqq e,\ x>0)$$

imamo

$$f'(x)=a^{x/a}\log a-1,\quad f''(x)=\frac{1}{a}a^{x/a}\log^2 a>0\qquad (a\geqq e,\ x>0).$$

Prema tome, f' je rastuća funkcija, pa imamo

$$f'(x)>f'(0)=\log a-1\geqq 0\qquad (a\geqq e,\ x>0).$$

Dakle i f je rastuća funkcija, tako da je

$$f(x)>f(0)=0\qquad (a\geqq e,\ x>0),$$

odakle sleduje nejednakost (1).

PRIMER 5.

(1) $$(y-x)\,a^x\log a<a^y-a^x<(y-x)\,a^y\log a\qquad (x<y,\ a>1).$$

Dokaz. Funkcija $t\mapsto f(t)=a^t\,(a>1)$ zadovoljava uslove za primenu LAGRANGEOVE teoreme o konačnim priraštajima u intervalu (x, y). Na osnovu pomenute teoreme imamo

$$\frac{a^y-a^x}{y-x}=a^c\log a\qquad (x<c<y).$$

Kako je funkcija $t\mapsto a^t\,(a>1)$ rastuća, odavde dobijamo

$$a^x\log a<\frac{a^y-a^x}{y-x}<a^y\log a\qquad (x<y;\ a>1).$$

Ova nejednakost ekvivalentna je sa (1).

PRIMER 6.

(1) $$0<\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x^2<\frac{5}{81}x^3\qquad (x>0).$$

Dokaz. Prema TAYLOROVOJ formuli je

(2) $$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}}\qquad (0<\theta<1),$$

tj.

(3) $$\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}=\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}}\qquad (0<\theta<1).$$

Kako je $1+\theta x\geqq 1$ za $x>0$, važe nejednakosti

(4) $$0<\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/3}}<\frac{5}{81}x^3.$$

Iz (3) i (4) sleduju nejednakosti (1).

Zadaci za rešavanje

M I, Uvod: 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.27, 6.28, 6.29, 6.30, 6.34, 6.35, 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42.

3. VAŽNE NEJEDNAKOSTI

3.1. BERNOULLIEVA NEJEDNAKOST

Stav 1. *Ako je $x\geqq -2$ i n prirodan broj, važi* BERNOULLIEVA *nejednakost*

(1) $$(1+x)^n\geqq 1+nx,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x=0$ ili $n=1$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da nejednakost (1) važi za $x>-1$. Primenimo metod matematičke indukcije. Za $n=1$ relacija (1) postaje indentitet. Pretpostavimo da je nejednakost (1) tačna za $n=k\geqq 1$, tj. da je

(2) $$(1+x)^k\geqq 1+kx.$$

Množeći ovu nejednakost sa $1+x\,(>0)$, dobijamo

$$(1+x)^{k+1}\geqq (1+x)(1+kx)=1+(k+1)x+kx^2,$$

odakle je

(3) $$(1+x)^{k+1}\geqq 1+(k+1)x.$$

Kako iz (2) sleduje (3), dokazali smo da je nejednakost (1) tačna za $x>-1$.

Kako je, za $-2\leqq x\leqq -1$,

$$(1+x)^n\geqq -|1+x|^n\geqq -|1+x|=1+x\geqq 1+nx,$$

nejednakost (1) važi i za $-2\leqq x\leqq -1$.

Stav 2. *Ako je a realan broj, tada je*

(4) $$(1+x)^a>1+ax\qquad (-1<x\neq 0,\ a>1 \text{ ili } a<0),$$

(5) $$(1+x)^a<1+ax\qquad (-1<x\neq 0,\ 0<a<1).$$

Ovo su generalisane BERNOULLIEVE nejednakosti.

Dokaz. Primenjujući TAYLOROVU formulu, dobijamo

(6) $$(1+x)^a-1-ax=\frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\theta x)^{a-2}\qquad (0<\theta<1).$$

Pošto je, pri učinjenim pretpostavkama, $1+\theta x>0$, nalazimo

$$\operatorname{sgn}\left((1+x)^a-1-ax\right)=\operatorname{sgn}\left(a(a-1)\right)\qquad (x\neq 0),$$

odakle proističu nejednakosti (4) i (5).

3.2. CAUCHYEVA NEJEDNAKOST

Stav 1. *Ako su* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b=(b_1, \ldots, b_n)$ *dva niza realnih brojeva, tada je*

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

gde jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

Ova nejednakost zove se CAUCHYeva ili CAUCHY—SCHWARZova ili CAUCHY—SCHWARZ—BUNIAKOWSKIeva nejednakost.

Usvojićemo zbog kratkoće prvi naziv.

Dokaz. Posmatrajmo kvadratni polinom po x

(2) $$(a_1 x+b_1)^2+(a_2 x+b_2)^2+\cdots+(a_n x+b_n)^2,$$

tj.

(3) $$(a_1^2+\cdots+a_n^2)\,x^2+2\,(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n)\,x+(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

Na osnovu (2) zaključujemo da (3) nije negativno ni za jedno x, te je

$$(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n)^2-(a_1^2+\cdots+a_n^2)\,(b_1^2+\cdots+b_n^2)\leq 0.$$

To je u stvari nejednakost (1) koju je trebalo dokazati.

Jednakost u (1) važi ako i samo ako su u (2) svi članovi $a_k x+b_k$ $(k=1, \ldots, n)$ jednaki nuli za neku vrednost $x=x_0$, tj. ako je

$$\frac{b_1}{a_1}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}.$$

Ovo u stvari znači da su nizovi a i b proporcionalni.

Sada ćemo dokazati CAUCHYevu nejednakost u kompleksnoj formi.

Stav 2. *Ako su* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b=(b_1, \ldots, b_n)$ *dva niza kompleksnih brojeva, tada je*

(4) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$

Dokaz. Ako u nejednakosti (9) u 1.3. stavimo $z_k=a_k b_k$ $(k=1, \ldots, n)$, dobijamo

(5) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k|.$$

Na osnovu nejednakosti (1) imamo

(6) $$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$

Iz (5) i (6) dobijamo nejednakost (4).

3.3. ČEBIŠEVLJEVA NEJEDNAKOST

Stav 1. *Ako je*

(1) $$a_1\leq \cdots \leq a_n,\ b_1\leq \cdots \leq b_n, \quad ili \quad a_1\geq \cdots \geq a_n,\ b_1\geq \cdots \geq b_n,$$

tada važi nejednakost

(2) $$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ *ili* $b_1=\cdots=b_n$.

Ova nejednakost zove se ČEBIŠEVljeva nejednakost.

Dokaz. Kako je

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\mu b_\mu-a_\mu b_\nu)=\sum_{\mu=1}^{n}\left(n a_\mu b_\mu-a_\mu\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)=n\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu-\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu,$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu b_\nu-a_\nu b_\mu)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(n a_\nu b_\nu-a_\nu\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu\right)=n\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu,$$

važi identitet

(3) $$n\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\mu b_\mu-a_\mu b_\nu+a_\nu b_\nu-a_\nu b_\mu)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\mu-a_\nu)\,(b_\mu-b_\nu).$$

Na osnovu (1) je

(4) $$(a_\mu-a_\nu)\,(b_\mu-b_\nu)\geq 0 \qquad (\mu, \nu=1, \ldots, n),$$

pa iz (3) dobijamo nejednakost (2).

Jednakost u (4), pa prema tome i u (2), važi ako i samo ako je

$$a_1=\cdots=a_n \quad \text{ili} \quad b_1=\cdots=b_n.$$

3.4. ABELOVA NEJEDNAKOST

Stav 1. *Ako su* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b=(b_1, \ldots, b_n)$ *dva niza realnih brojeva takvih da je* $b_1\geq \cdots \geq b_n\geq 0$, *i ako su M najveći i m najmanji među brojevima* $s_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$ $(k=1, \ldots, n)$, *tada važe nejednakosti*

(1) $$m b_1\leq a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\leq M b_1.$$

Ovo je ABELova nejednakost.

Dokaz. Pođimo od

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n$$
$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

Sabiranjem nejednakosti

$$m(b_1 - b_2) \leq s_1 (b_1 - b_2) \leq M(b_1 - b_2),$$
$$m(b_2 - b_3) \leq s_2 (b_2 - b_3) \leq M(b_2 - b_3),$$
$$\vdots$$
$$m(b_{n-1} - b_n) \leq s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) \leq M(b_{n-1} - b_n),$$
$$mb_n \leq s_n b_n \leq Mb_n,$$

dobijamo nejednakost (1).

3.5. HÖLDEROVA NEJEDNAKOST

Da bismo dokazali HÖLDERovu nejednakost, potreban nam je

Stav 1. *Ako su a, b nenegativni realni brojevi,* $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *važi nejednakost*

(1) $$\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a^p = b^q$.

Dokaz. Nejednakost

(2) $\log x - x + 1 \leq 0 \quad (x>0)$

(videti primer 2 u 2.4) za $x = \dfrac{a^p}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q}$ postaje

$$\log \frac{a^p}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} - \frac{a^p}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} + 1 \leq 0.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa

(3) $$\log \frac{a}{\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)^{\frac{1}{p}}} - \frac{\frac{1}{p}a^p}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} + \frac{1}{p} \leq 0.$$

Slično ovome, za $x = \dfrac{b^q}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q}$ nejednakost (2) postaje

(4) $$\log \frac{b}{\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)^{\frac{1}{q}}} - \frac{\frac{1}{q}b^q}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} + \frac{1}{q} \leq 0.$$

Ako nejednakosti (3) i (4) saberemo i povedemo računa o uslovu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dobijamo

$$\log \frac{ab}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} \leq 0,$$

odakle sleduje (1).

Jednakost u (1) važi ako i samo ako važi u (3) i (4). Kako u (2) važi jednakost ako i samo ako je $x=1$, s obzirom na uvedenu smenu mora biti $\dfrac{a^p}{\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q} = 1$, što implicira: $a^p = b^q$.

PRIMEDBA 1. U stvari nejednakost (1) je dokazana samo za $a, b>0$. Međutim, očigledno je da nejednakost važi i ako je $ab=0$.

Stav 2. *Ako su* $a_k, b_k \geq 0$ $(k=1, \ldots, n)$, $p>1$ *i* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *važi nejednakost*

(5) $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $b_\nu^q = \lambda a_\nu^p$ *ili* $a_\nu^p = \mu b_\nu^q$ $(\nu = 1, \ldots, n;$ $\lambda, \mu = \text{const})$.

(5) je HÖLDERova nejednakost.

Dokaz. Ako u (1) smenimo a i b sa

(6) $$a = \frac{a_\nu}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad b = \frac{b_\nu}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

dobijamo

$$\frac{1}{p} \frac{a_\nu^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_\nu^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \geq \frac{a_\nu b_\nu}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Posle sumiranja po ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, iz ove nejednakosti izlazi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

što je, s obzirom da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, nejednakost (5).

Da bi u (5) važio znak jednakosti, mora važiti znak jednakosti u (1), tj. mora biti $a^p = b^q$. S obzirom na (6), iz jednakosti $a^p = b^q$ dobijamo uslov iz stava 2.

Za $p=q=2$, iz HÖLDERove nejednakosti dobija se CAUCHYeva nejednakost.

3.6. NEJEDNAKOST MINKOWSKOG

Stav 1. *Ako su* $a=(a_1, \dots, a_n)$ i $b=(b_1, \dots, b_n)$ *dva niza nenegativnih realnih bvojeva i* $r>1$, *tada je*

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

sa jednakošću ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

Ovo je nejednakost MINKOWSKOG.

Dokaz. Pođimo od identiteta

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{r-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{r-1}.$$

Ako na svaki od zbirova na desnoj strani primenimo HÖLDEROVU nejednakost, dobijamo

(2) $$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(r-1)s}\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(r-1)s}\right)^{\frac{1}{s}},$$

gde je $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

Možemo pretpostaviti da je bar jedan od članova a_k, b_k različit od nule, inače bi nejednakost (1) bila identitet. Pod tom pretpcstavkom možemo obe strane nejednakosti (2) podeliti sa

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(r-1)s}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right)^{\frac{1}{s}},$$

posle čega dobijamo nejednakost (1).

3.7. JORDANOVA NEJEDNAKOST

Stav 1. *Za svako* $\theta \left(0<\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ *važi nejednakost*

(1) $$\frac{\sin\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Ovo je JORDANOVA nejednakost.

Dokaz. Kako je $\sec^2\theta \geq 1 \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, integracijom na segmentu $[0, \theta]$ dobijamo

$$\operatorname{tg}\theta \geq \theta \qquad \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Na osnovu ove nejednakosti je

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta-\operatorname{tg}\theta) \leq 0 \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Prema tome, funkcija $\theta \mapsto \frac{\sin\theta}{\theta}$ je odadajuća za $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, pa imamo

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geq \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \qquad \left(0<\theta\leq\frac{\pi}{2}\right).$$

Ako se (1) kombinuje sa $\sin\theta\leq\theta$ $(\theta\geq 0)$, dolazi se do nejednakosti

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \qquad \left(0<|\theta|\leq\frac{\pi}{2}\right).$$

3.8. NEJEDNAKOSTI SA SREDINAMA

Definicija 1. *Ako je* $a=(a_1, \dots, a_n)$ *konačan niz pozitivnih brojeva, tada je:*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$ *harmonijska sredina brojeva* $a_1, \dots, a_n$;

$$G_n(a) = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$ *geometrijska sredina istih brojeva;*

$$A_n(a) = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$ *aritmetička sredina istih brojeva;*

$$M_n(a) = \left(\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$ *kvadratna sredina istih brojeva.*

Stav 1. *Za svaki konačan niz* $a=(a_1, \dots, a_n)$ *pozitivnih brojeva važe nejednakosti:*

$$\begin{aligned} \min(a_1, \dots, a_n) &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \\ &\leq (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \\ &\leq \left(\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

tj.

$$\min(a_1, \dots, a_n) \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq M_n(a) \leq \max(a_1, \dots, a_n).$$

U ovim nejednakostima jednakost važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Posmatrajmo najpre nejednakost

(1) $A_n(a) \geqq G_n(a)$.

Ovu nejednakost dokazaćemo kombinujući metod matematičke indukcije sa metodom ispitivanja funkcija.

Za $n=2$ je

$$A_2(a)-G_2(a)=\frac{1}{2}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqq 0,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=a_2$,

Pretpostavimo sada da nejednakost (1) važi za neko n s tim što jednakost nastupa ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ i posmatrajmo funkciju

$$f(a_n)=A_n(a)-G_n(a)=\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}-(a_1\cdots a_{n-1}a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Kako je

$$f'(a_n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}a_n^{\frac{1-n}{n}},$$

iz jednačine $f'(a_n)=0$ dobijamo

(2) $a_n=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=G_{n-1}(a)$.

Za ovu vrednost a_n je

$$f''(a_n)=\frac{n-1}{n^2}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}a_n^{\frac{1-2n}{n}} \geqq 0 \qquad (n>1).$$

Prema tome, funkcija f ima minimum za vrednost a_n koja je određena sa (2) i taj minimum je

$$\min f(a_n)=\frac{n-1}{n}(A_{n-1}(a)-G_{n-1}(a)).$$

Stoga je $f(a_n) \geqq \min f(a_n)$, tj.

$$n(A_n(a)-G_n(a)) \geqq (n-1)(A_{n-1}(a)-G_{n-1}(a)).$$

Prema tome, ako pretpostavimo da nejednakost (1) važi za $n-1$, ona važi i za n.

Pretpostavimo sada da jednakost $A_{n-1}(a)=G_{n-1}(a)$ važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_{n-1}$. Tada, na osnovu (2) zaključujemo da jednakost $A_n(a)=G_n(a)$ važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n$.

Prema tome, nejednakost (1) je dokazana matematičkom indukcijom.

Za brojeve $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ s obzirom na jednakost (1), imamo

(3) $\left(\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \dfrac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$,

gde jednakost važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Iz (3) sleduje

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqq (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Ako se na desnoj strani indentiteta

$$(a_1+\cdots+a_n)^2=a_1^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n),$$

umesto $2a_ia_k$ stavi $a_i^2+a_k^2\ (\geqq 2a_ia_k)$, dobija se nejednakost

(4) $(a_1+\cdots+a_n)^2 \leqq n(a_1^2+\cdots+a_n^2)$,

koja važi za sve realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$.

Ako su svi brojevi $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni, iz (4) izlazi

$$a_1+\cdots+a_n \leqq \left(n(a_1^2+\cdots+a_n^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

tj.

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \leqq \left(\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dokazaćemo sada da je

(5) $\min(a_1, \ldots, a_n) \leqq \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

Ako se pretpostavi

(6) $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$,

čime se ne umanjuje generalnost zaključka, nalazi se

(7) $\min(a_1, \ldots, a_n)=a_1$.

Na osnovu (7) nejednakost (5) postaje

$$\frac{a_1}{a_1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} \leqq n.$$

Ova nejednakost je tačna jer je, prema (6),

$$\frac{a_1}{a_k} \leqq 1 \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Prema tome, dokazali smo nejednakost (5).

Ostaje još da dokažemo nejednakost

(8) $\left(\dfrac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \max(a_1, \ldots, a_n)$.

Ako se opet uzme pretpostavka (6), nejednakost (8) postaje

$$\left(\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq a_n, \text{ tj. } a_1^2+\cdots+a_n^2 \leqq na_n^2.$$

Ova nejednakost je tačna, jer je prema (6)

$a_k \leqq a_n \qquad (k=1, \ldots, n).$

Dakle nejednakost (7) je tačna.

Ovim je stav 1 dokazan.

Ako su $a_1, \ldots, a_n$ ma kakvi realni brojevi, tada je

$$\min(|a_1|, \ldots, |a_n|) \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \max(|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Definicija 2. *Neka su* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $p=(p_1, \ldots, p_n)$ $(n>1)$ *dva niza pozitivnih brojeva. Težinska sredina reda* r *(*r *realan broj) definisana je sa*

$$M_r(a;\,p)=\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (r\neq 0,\ |r|<+\infty),$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{p_k}\right)^{1\Big/\sum_{k=1}^{n} p_k} \qquad (r=0),$$

$$=\min(a_1, \ldots, a_n) \qquad (r=-\infty),$$

$$=\max(a_1, \ldots, a_n) \qquad (r=+\infty).$$

Za $r=-1$ dobijamo harmonijsku težinsku sredinu, za $r=0$ geometrijsku, za $r=1$ aritmetičku, za $r=2$ kvadratnu.

Za ovako definisanu sredinu važi

Stav 2. *Ako svi* $a_k\,(k=1, \ldots, n)$ *nisu međusobno jednaki,* $M_r(a;\,p)$ *je neprekidna i striktno rastuća funkcija od* r*, tj. važi nejednakost*

(9) $\qquad M_s(a;\,p)<M_t(a;\,p) \qquad (-\infty \leqq s<t \leqq +\infty).$

Dokaz. Da bismo dokazali da je funkcija $M_r(a, p)$ neprekidna, dovoljno je da dokažemo jednakost

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{p_k}\right)^{1\Big/\sum_{k=1}^{n} p_k}. \tag{10}$$

Kako je

$$A=\log\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)^{\frac{1}{r}}=\frac{\log\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r-\log\sum_{k=1}^{n} p_k}{r},$$

primenom L'Hôpitalovog pravila dobijamo

$$\lim_{r\to 0} A=\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r \log a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r}=\log\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{p_k}\right)^{1\Big/\sum_{k=1}^{n} p_k},$$

odakle sleduje (10).

Dokažimo sada da je $M_r(a;\,p)$ striktno rastuća funkcija od r.

Neka je $0<s<t$. Ako stavimo $p=\frac{t}{s}$, $q=\frac{t}{t-s}$, tada je $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, pa su ispunjeni uslovi za primenu Hölderove nejednakosti:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\alpha_k,\ \beta_k\geqq 0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{11}$$

(videti 3.5). Ako je $\alpha_k=p_k^{\frac{1}{p}}a_k^s$, $\beta_k=p_k^{\frac{1}{q}}$ $(k=1, \ldots, n)$, nejednakost (11) postaje

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^s<\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^t\right)^{\frac{s}{t}}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{\frac{t-s}{t}}, \tag{12}$$

odakle sleduje nejednakost (8), za slučaj $0<s<t$.

Ako je $x<y<0$, tada je $0<-y<-x$. Ako u (12) smenimo s sa $-x$, t sa $-y$ i a_k sa a_k^{-1}, dobijamo nejednakost

$$M_x(a;\,p)<M_y(a;\,p) \qquad (x<y<0),$$

tj. funkcija $M_r(a;\,p)$ je rastuća funkcija i za negativne vrednosti argumenta r. Kako smo dokazali da je ova funkcija i neprekidna, nejednakost (9) važi za svako s, $t\in[-\infty, +\infty]$.

Primedba 1. U (11) važi znak $<$ a ne $\leqq$ jer da bi u Hölderovoj nejednakosti važio znak jednakosti mora biti $\alpha_k^p=\lambda\beta_k^q$ ili $\beta_k^q=\mu\alpha_k^p$ $(k=1, \ldots, n;\ \lambda, \mu=\text{const})$, tj. $a_1=\cdots=a_n$, s obzirom na uvedene smene. Međutim, u stavu je pretpostavljeno da svi a_k nisu međusobno jednaki.

4. PRIMENA NEJEDNAKOSTI U LINEARNOM PROGRAMIRANJU

4.1. PRIMER LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Transportni problem. Na dva stovarišta A_1 i A_2 nalazi se teret od po a_1 i a_2 jedinica respektivno. Ovaj teret treba prebaciti potrošačima B_1, B_2, B_3 tako da potrošači B_1, B_2, B_3 dobiju redom b_1, b_2, b_3 jedinica tereta. Pri tome se pretpostavlja da je

(1) $$a_1+a_2=b_1+b_2+b_3.$$

Cena prevoza jedinice tereta iz skladišta A_i do potrošača B_j je c_{ij}. Treba organizovati prebacivanje tereta tako da opšta cena prevoza bude što manja.

Neka je x_{ij} broj jedinica tereta koji se iz stovarišta A_i prebacuje u stovarište B_j. Prema tome, problem se sastoji u tome da se nađe minimalna vrednost linearne forme

(2) $$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$$

pod izvesnim uslovima. Ti uslovi su sledeći:

(3) $$x_{11}+x_{21}=b_1,\quad x_{12}+x_{22}=b_2,\quad x_{13}+x_{23}=b_3,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,\quad x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2$$

(prva tri uslova predstavljaju podatke koliko tereta treba prebaciti svakom potrošaču, a druga dva koliko tereta treba prebaciti sa svakog stovarišta).

Kako je $x_{ij}\geq 0$, definitivna formulacija navedenog problema je:

Naći nenegativna rešenja sistema linearnih jednačina (3) tako da linearna forma (2) ima minimalnu vrednost, vodeći računa pri tome da je ispunjen uslov (1).

4.2. OPŠTA FORMULACIJA PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Osnovni problem linearnog programiranja sastoji se u sledećem:

Data je linearna forma

(1) $$F=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

i sistem linearnih jednačina

(2) $$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

i sistem nejednakosti

(3) $$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0.$$

Odrediti minimum (maksimum) linearne forme (1) tako da važe uslovi (2) i (3).

Sva rešenja sistema jednačina (2) koja ispunjavaju uslove (3) nazivaju se dopustiva rešenja.

Ono dopustivo rešenje za koje linearna forma dostiže minimum (ili maksimum) naziva se optimalno rešenje.

Na ovaj problem može se svesti i niz drugih problema koji se postavljaju u linearnom programiranju. Navešćemo sledeće:

1° Ako u uslovu (3) ima neka nejednakost oblika $x_i\leq 0$, tada je umesto promenljive x_i dovoljno uvesti novu promenljivu $y_i=-x_i$;

2° Ako se u uslovu (2) umesto jednačina pojavljuju nejednačine; neka, na primer, umesto i-te jednačine bude data nejednačina

(4) $$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geq b_i.$$

Uvodimo novu dopunsku promenljivu x_{n+1} na sledeći način:

$$x_{n+1}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-b_i.$$

Uslov (4) je tada ekvivalentan uslovu $x_{n+1}\geq 0$, tako da uvođenjem ove nove promenljive uslov (4) prelazi u grupu uslova (3).

Primetimo da osnovni problem linearnog programiranja ima smisla samo u slučaju kada je rang $A<n$, gde je A matrica koeficijenata sistema jednačina (2). U protivnom, sistem jednačina (2) bi imao jedinstveno rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, te bi, na osnovu toga, linearna forma F imala samo jednu vrednost.

Sada ćemo dokazati kako se uslovi (2) mogu zameniti sistemom uslova datih u obliku nejednakosti. Neka je r rang matrice A sastavljene od koeficijenata sistema jednačina (2). Tada se r nepoznatih iz sistema jednačina (2) mogu izraziti pomoću $n-r=k$ nepoznatih. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se prvih k nepoznatih biraju proizvoljno i da se ostale nepoznate izražavaju pomoću ovih. Tada dobijamo

(5) $$\begin{aligned}x_{k+1}&=d_{11}x_1+d_{12}x_2+\cdots+d_{1k}x_k+e_1,\\ x_{k+2}&=d_{21}x_1+d_{22}x_2+\cdots+d_{2k}x_k+e_2,\\ &\vdots\\ x_n&=d_{r1}x_1+d_{r2}x_2+\cdots+d_{rk}x_k+e_r.\end{aligned}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan sistemu uslova (2).

U posmatranom slučaju linearna forma F može se predstaviti u obliku

$$F=f_0+f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n.$$

Kako promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ treba da su nenegativne, imamo sledeći niz uslova:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&x_1 \geqq 0,\\
&x_2 \geqq 0,\\
&\vdots\\
&x_k \geqq 0,\\
&d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1k}x_k + e_1 \geqq 0,\\
&d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2k}x_k + e_2 \geqq 0,\\
&\vdots\\
&d_{r1}x_1 + d_{r2}x_2 + \cdots + d_{rk}x_k + e_r \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima (2) i (3).

Za rešavanje problema linearnog programiranja koriste se razni metodi (geometrijski, simpleks, matrični, itd.). Zadržaćemo se samo na geometrijskom metodu.

4.3. GEOMETRIJSKI METOD ZA REŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

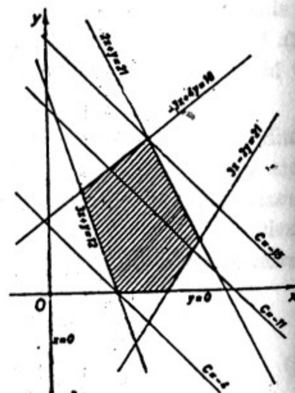
Na primerima ćemo izložiti kako se geometrijski metod primenjuje u slučajevima kada je broj nezavisno promenljivih 2.

PRIMER 1. Odrediti minimum linearne forme

$$(1)\quad F = -x - y$$

pod uslovima

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&x \geqq 0,\ y \geqq 0, \quad -3x + 4y \leqq 18,\\
&2x + y \leqq 21,\ \ 3x - 2y \leqq 21,\ \ 3x + y \geqq 12.
\end{aligned}
$$



Sl. 4.3.1.

Predstavimo u ravni Oxy oblast određenu nejednakostima (2). To je petougao šrafiran na slici 4.3.1.

S druge strane, predstavimo u istom koordinatnom sistemu familiju pravih $-x-y=C$.

To je, u stvari, geometrijsko mesto tačaka u kojima linearna forma F uzima iste vrednosti. Traženo rešenje biće ono za koje je C minimalno. To će biti u slučaju kada prava $-x-y=C$ prođe kroz tačku (6,9). Prema tome, traženo rešenje je $x=6$, $y=9$.

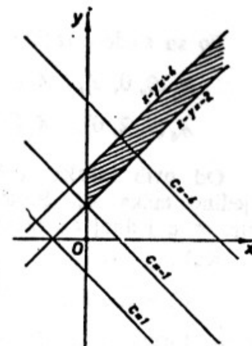
PRIMER 2. Odrediti minimum linearne forme

$$(1)\quad F = x + y - z - t - 1$$

pod uslovima

$$(2)\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad z \geqq 0,\quad t \geqq 0,$$

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&x - y - z = -4,\\
&x - y + t = -2,\\
&2x - 2y + t - z = -6,\\
&t + z = 2.
\end{aligned}
$$



Sl. 4.3.2.

Kako je rang sistema linearnih jednačina 2, dve promenljive se mogu izabrati proizvoljno. Neka su to x i y. Tada je

$$z = x - y + 4, \quad t = -x + y - 2,$$

pa linearna forma (1) postaje

$$F = x + y - 3,$$

dok se uslovi (2) i (3) svode na

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x - y + 4 \geqq 0,\quad -x + y - 2 \geqq 0.$$

Slično kao u prethodnom primeru dobijamo da je skup dopustivih rešenja oblast šrafirana na slici 4.3.2.

Ako u istom koordinatnom sistemu predstavimo familiju pravih

$$x + y - 3 = C,$$

zaključujemo da će C biti minimalno ako prava prođe kroz tačku (0, 2).

Prema tome, traženo optimalno rešenje je $x=0$, $y=2$, $z=2$, $t=0$.

Slično se može postupiti i u slučaju kada je broj nezavisno promenljivih 3.

U opštem slučaju do rešenja se može doći primenom sledećih stavova, koje navodimo bez dokaza.

Stav 1. *Oblast rešenja saglasnog sistema linearnih nejednakosti* (6) *iz* 4.2. *je konveksan mnogougao.*

Stav 2. *Ako optimalno rešenje linearne forme*

$$F = f_0 + f_1x_1 + \cdots + f_nx_n$$

uz uslove (1) *postoji, ono se dobija u jednom od temena konveksnog mnogougla koji predstavlja oblast rešenja sistema nejednakosti* (1).

PRIMER 3. Odrediti minimum linearne forme

$$F = 2 - 3x + y - z$$

uz uslove

$$(1)\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad z \geqq 0,\quad x \leqq 1,\quad 2x + y + z - 4 \leqq 0.$$

Potražimo tačke koje su zajedničke za hiper-ravni

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x = 1,\quad 2x + y + z - 4 = 0.$$

To su sledeće tačke:

$$A_1(0,0,0),\quad A_2(1,0,0),\quad A_3(0,0,4),\quad A_4(0,2,0),\quad A_5(1,0,2),$$
$$A_6(1,2,0),\quad A_7(2,0,0).$$

Od ovih tačaka treba odbaciti one koje ne zadovoljavaju uslove (1). To je jedino tačka A_7. Prema stavu 2 minimum linearne forme F, ako postoji, dobija se u jednoj od tačaka A_i $(i=1, \ldots, 6)$.

Kako je

$$F_{A_1}=2,\quad F_{A_2}=-1,\quad F_{A_3}=-2,\quad F_{A_4}=4,\quad F_{A_5}=-3,\quad F_{A_6}=1,$$

linearna forma F dostiže najmanju vrednost -3 za $x=1$, $y=0$, $z=2$.

Zadaci za rešavanje

1. Primenom geometrijskog metoda odrediti u kojim se granicama menja linearna forma $F=x_1-x_2$ ako su promenljive ograničene uslovima

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5&=6,\\ -2x_1+x_2+3x_3-4x_4+x_5&=2,\\ 5x_1-2x_2+x_3+2x_4-3x_5&=-4,\end{aligned}$$
$$x_i\geqq 0\quad (i=1, \ldots, 5).$$

2. Odrediti za koje vrednosti realnih brojeva a, b, c postoji maksimum linearne forme

$$F=x_1+3x_2+cx_3-x_4$$

uz uslove

$$\begin{aligned} ax_1-2x_2+x_3-3x_4&=5,\\ x_2+2x_3+x_4&=b,\end{aligned}$$
$$x_i\geqq 0\quad (i=1,2,3,4).$$

3. Odrediti maksimum linearne forme

$$F=x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5+3x_6+x_7-x_8-x_9-x_{10}-x_{11}$$

uz uslove

$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+3x_4+2x_5+3x_6+x_7+x_8 &=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4+3x_5+2x_6+2x_7+x_9 &=8,\\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+\frac{1}{2}x_5+x_6+x_7+x_{10} &=6,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5+3x_6+x_7+x_{11} &=7,\end{aligned}$$
$$0\leqq x_i\leqq 1\quad (i=1, \ldots, 7),$$
$$x_j\geqq 0\quad (j=8, \ldots, 11).$$

M I, Uvod: 6.31, 6.32, 6.33.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

1. VEKTORSKA ALGEBRA
2. KRIVE DRUGOG STEPENA
3. TAČKA
4. RAVAN
5. PRAVA
6. POVRŠINE

1. VEKTORSKA ALGEBRA

1.1. SKALARI I VEKTORI

Veličine sa kojima se operiše u matematici, prirodnim i tehničkim naukama mogu se podeliti u sledeće dve kategorije:

1° One veličine koje su definisane samo svojom brojnom vrednošću nazivaju se *skalarnim veličinama* ili kraće *skalarima.*

Skalari mogu biti pozitivni ili negativni, no neki skalari su isključivo pozitivni.

Primerima skalarnih veličina mogu poslužiti: površine geometrijskih figura, zapremine tela, temperatura, masa itd. Sve su ove određene svojom brojnom (skalarnom) vrednošću u zavisnosi od izbora sistema jedinica za njihovo merenje. Površina odnosno zapremina jedne figure definisane su pozitivnim skalarima; temperatura, pak može biti definisana kako pozitivnim, tako i negativnim skalarom.

2° Veličine kod kojih je potrebno poznavati, osim njihove brojne vrednosti još i *pravac* i *smer* (*smisao*), nazivaju se *vektorskim veličinama* ili *vektorima.*

Primerima vektorskih veličina javljaju se fizičke veličine kao što su: brzina, ubrzanje, sila, jačina magnetnog polja, pomeranje itd.

1.2. ELEMENTI VEKTORA. OBELEŽAVANJE

Nezavisno od fizikalnog značenja, vektori se geometrijski predstavljaju orijentisanim (usmerenim) odsečkom prave linije, tj. usmerenom duži. Dužina odsečka u odgovarajućim jedinicama predstavlja skalarnu veličinu vektora, koja se naziva još *intenzitetom* ili *modulom vektora.* Strelica na jednom od krajeva odsečka ukazuje na *smer* (*smisao*) vektora. Kraj usmerenog odsečka na kome se ne nalazi strelica naziva se *početkom* ili *napadnom tačkom* vektora. Najzad, prava linija kojoj pripada ovakav usmereni odsečak predstavlja *pravac* ili *nosač* vektora.

To znači da je vektor definisan: *modulom, smerom i pravcem* koji predstavljaju *elemente vektorske veličine.*

Za obeležavanje vektora upotrebljavaju se različite oznake. Tako, na primer, vektori se obeležavaju slovima latinske azbuke sa strelicom iznad slova: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{r}, \ldots$; moduli ovih vektora se u tom slučaju obeležavaju tim istim slovima, ali bez strelice, tj. $a, b, c, \ldots, r, \ldots$, ili sa $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, \ldots, |\vec{r}|, \ldots$. U upotrebi je i obeležavanje vektora malim ili velikim gotskim slovima: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{r}, \mathfrak{v}$, ili $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$, pri čemu

se moduli tih vektora označavaju odgovarajućim slovima latinske azbuke: $a, b, c, \ldots, r, v$, ili $A, B, C, D, \ldots$, ili $|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}|, \ldots, |\mathfrak{r}|, |\mathfrak{v}|$. Vektori se obeležavaju i masnim slovima latinske azbuke $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$, a njihovi moduli sa $a, b, c, \ldots$ Ako se velikim slovima označe početna i krajnja tačka vektora, na primer sa A i B, za ovaj vektor se upotrebljava i oznaka $\overrightarrow{AB}$, a za njegov modul: AB ili $|\overrightarrow{AB}|$.

Na slikama ćemo stavljati strelice iznad odgovarajućih vektora. Tako vektor koji je u tekstu obeležen sa $\mathbf{a}$ na slici će biti obeležen sa $\vec{a}$.

Definicija 1. *Vektor čiji je modul jednak nuli naziva se nula-vektor.*

Napadna tačka ovog vektora se poklapa sa njegovom krajnjom tačkom; pravac i smer nula-vektora nisu definisani.

Uvodimo $\mathbf{0}$ ili $\vec{0}$ za oznaku nula-vektora uz napomenu, da je suština ove oznake različita od one u skalarnoj algebri.

1.3. KLASIFIKACIJA VEKTORA

Klasifikacija vektora se vrši na osnovu definicije jednakosti dva vektora, tj. na osnovu definicije vektorske jednakosti $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Na osnovu ovoga vektori se dele u tri kategorije: 1) na ***slobodne vektore,*** 2) na ***vektore vezane za pravu*** i 3) na ***vektore vezane za tačku.***

Definicija 1. ***Vektori a i b su jednaki, tj. a = b, ako imaju jednake module, iste smerove, a nosači su im paralelni ili se poklapaju.***

Ovi se vektori nazivaju ***slobodnim vektorima.*** Po definiciji, slobodne vektore dozvoljeno je pomerati duž njihovog nosača ili paralelno ovom nosaču, zadržavajući pri tome smer i modul vektora nepromenjenim. Ovi su vektori jednaki među sobom.

Primer 1. Vektori naspramnih stranica paralelograma $ABCD$ su jednaki kao slobodni, tj.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Definicija 2. *Vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ su jednaki ako imaju jednake module, iste smerove i zajednički pravac* (*nosač*).

Ovi se vektori nazivaju *vektorima vezanim za pravu* ili *vezanim vektorima.* Vezani vektor može se pomerati duž svog nosača, pa da bi jednakost $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ostala u važnosti, mora nosač ovih vektora biti zajednički, moduli jednaki i smerovi isti.

Primerom vezanog vektora može poslužiti sila $\mathbf{F}$ koja dejstvuje na kruto telo. Dejstvo ove sile na kruto telo se neće promeniti ako se njena napadna tačka premesti u ma koju tačku nosača vektora $\mathbf{F}$.

Primer 2. Vektori naspramnih strana paralelograma $ABCD$ nisu jednaki kao vektori vezani za pravu, tj.

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}.$$

Definicija 3. ***Vektori a i b su jednaki ako imaju jednake module, zajednički nosač i iste smerove, a napadne tačke im se poklapaju.***

Ovo su tzv. *vektori vezani za tačku.* Znači, ako su dva vektora vezana za tačku jednaka, oni se moraju poklapati.

U izlaganju vektorske algebre mi ćemo operisati sa slobodnim vektorima, te ćemo u tom izlaganju pod pojmom vektor podrazumevati slobodni vektor.

1.4. PREDMET VEKTORSKE ALGEBRE

Predmetom proučavanja vektorske algebre služe neke od analognih operacija onima u skalarnoj algebri, no s obzirom na to da su vektori veličine za čije je potpuno određivanje potrebno poznavati tri napred navedena elementa, u vektorskoj algebri se pojedine računske operacije uvode definicijom. Kao što će se videti iz daljeg izlaganja, rezultat ovako definisanih operacija može biti vektorska ili skalarna veličina. Dalje, vektorska algebra proučava zakone definicijom uvedenih operacija sa vektorskim veličinama i vrši poređenje sa važnošću odgovarajućeg zakona kod operacija u skalarnoj algebri. Uporedo s ovim, u vektorskoj algebri se proučavaju i osobine veličina koje se javljaju kao rezultat izvesne operacije.

Na ovaj način vektorska algebra fundira teren za neposredno operisanje sa vektorskim veličinama. Ovim je dobijeno ne samo u očiglednosti i kratkoći tretiranja problema geometrije već i kod tretiranja problema primenjenih nauka, u prvom redu fizičkih i tehničkih. Značaj korišćenja vektorske metode u mehanici, teorijskoj fizici, tehničkim i uopšte prirodnim naukama leži u tome što ona omogućava konciznost, punu preglednost u stilizovanju rezultata i zakona ovih nauka, pri čemu se pri samim operacijama ne gubi karakter vektorskih veličina nad kojima se takve operacije izvode.

1.5. SABIRANJE VEKTORA

Uočimo najpre dva vektora a i b koji su dovedeni u takav položaj da se početak B vektora b nalazi u krajnjoj tački vektora a.

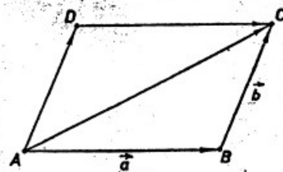
Definicija 1. *Vektor c sa napadnom tačkom u napadnoj tački A vektora a i krajem u krajnjoj tački C vektora b naziva se zbirom vektora a i b i označava se simbolički*

$$c=\overrightarrow{AC}=a+b.$$

Ova definicija se u vektorskoj algebri naziva *pravilom trougla.*

Dopunimo li sliku do paralelograma $ABCD$, tada se iz nje vidi da vektor $c=a+b$ predstavlja vektor dijagonale $\overrightarrow{AC}$ toga paralelograma čija je napadna tačka u A, a krajnja tačka u tački C—kraju vektora b nadovezanog na vektor a. Zato se ovako uvedena definicija zbira dva vektora naziva i *pravilom paralelograma.*

Ako vektori a i b imaju nosače paralelne, tada je: a) za slučaj kad su smerovi ovih vektora isti, njihov zbir je vektor istog pravca i smera sa modulom jednakim $a+b$; b) za slučaj suprotnih smerova vektora a i b, njihov zbir ima isti pravac, modul jednak $|a-b|$, a smer onog od dva vektora čiji je modul veći.



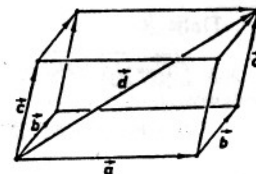
Sl. 1.5.1.

Iz relacije $c=a+b$ i slike 1.5.1 proizilazi da je

$$c=|a+b|\leq a+b,$$

tj. modul vektorskog zbira dva vektora nije veći od zbira modula sabiraka. Ona izražava osobinu poznatu iz geometrije trougla.

Ako uočimo tri vektora sa zajedničkim početkom koji uopšte ne leže u jednoj ravni, tada se nad tim vektorima kao ivicama može konstruisati paralelepiped. Vektor d sa početkom u početku vektora a i krajem u krajnjoj tački vektora c, pri čemu su vektori a, b i c nadovezani jedan na drugi, kako je to prikazano na slici 1.5.2 predstavlja zbir vektora a, b i c, a simbolički se označava:


Sl. 1.5.2

$$d=a+b+c \qquad (\textit{pravilo paralelepipeda}).$$

Vektorski zbir d u ovom slučaju predstavljen je vektorom—dijagonalom paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b i c.

Definicija 2. *Pod zbirom konačnog broja od n slobodnih vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ podrazumeva se vektor s čiji se početak nalazi u napadnoj tački vektora a_1, a kraj — u krajnjoj tački vektora a_n pod uslovom da su vektori nadovezani jedan na drugi (pravilo poligona* — videti sl. 1.5.3).

Za sabiranje vektora važe sledeća dva zakona:

Komutativni zakon po kome vektorski zbir dva vektora ne zavisi od poretka sabiraka, tj.

$$a+b=b+a.$$

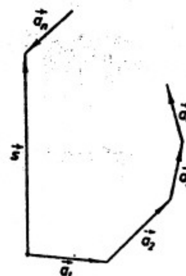
Zaista, iz $\triangle ABC$ (sl. 1.5.1) najpre je

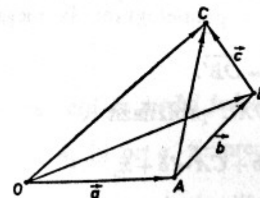
$$\overrightarrow{AC}=c=a+b,$$

a iz $\triangle ACD$

$$\overrightarrow{AC}=c=b+a, \quad \text{tj.} \quad a+b=b+a.$$

Asocijativni zakon prema kome se vektorski zbir ne menja ako se sabirci grupišu na proizvoljan način.


Sl. 1.5.3.



Sl. 1.5.4.

Pokazaćemo da ovaj zakon važi na primeru zbira od tri vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$. Iz slike 1.5.4 proizilazi

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

Dalje je

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

a odavde

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

1.6. ODUZIMANJE VEKTORA

Definicija 1. *Razlikom vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ naziva se vektor $\boldsymbol{x}$ takav, da je zbir ovoga vektora i vektora $\boldsymbol{b}$ jednak vektoru $\boldsymbol{a}$.*

Simbolički razlika vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ piše se u obliku

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}.$$

Po definiciji je, dakle, razlika $\boldsymbol{x}$ vektor za koji je zadovoljena relacija

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}.$$

Iz slike 1.6.1 proizilazi da je vektor $\boldsymbol{x}$ predstavljen vektorom dijagonale $\overrightarrow{CA}$ paralelograma $OABC$ konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Znači da je

$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \quad \text{a} \quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

tj. vektor dijagonale $\overrightarrow{OB}$ predstavlja zbir, a vektor $\overrightarrow{CA}$ razliku vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Definicija 2. *Suprotnim (protivnim) vektorom vektoru $\boldsymbol{b}$ naziva se vektor koji ima modul jednak modulu vektora $\boldsymbol{b}$, nosači su im paralelni, a smerovi suprotni.*

Suprotan vektor vektoru $\boldsymbol{b}$ označavaćemo simbolom $-\boldsymbol{b}$.

Zbir vektora $\boldsymbol{b}$ i suprotnog vektora $-\boldsymbol{b}$ je nula-vektor tj.

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

Stav 1. *Operacija oduzimanja vektora $\boldsymbol{b}$ od vektora $\boldsymbol{a}$ ekvivalentna je operaciji sabiranja vektora $\boldsymbol{a}$ i vektora $-\boldsymbol{b}$, suprotnog vektoru $\boldsymbol{b}$, tj.*

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, tada je $\overrightarrow{AB'}=-\boldsymbol{b}$ suprotan vektor vektoru $\boldsymbol{b}$. U četvorouglu $OB'AC$ suprotne strane AB' i OC su paralelne i jednake, tj. taj četvorougao je paralelogram. Iz njega proizilazi:

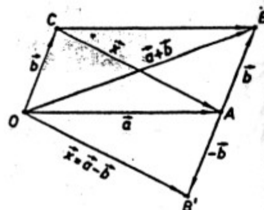
(1) $\quad \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OB'}.$

Iz $\triangle OAC$ proizilazi:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x},$$

tj. po definiciji oduzimanja:

$$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$



Sl. 1.6.1.

No iz $\triangle OAB'$ proizilazi

$$\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Na osnovu poslednjih dveju relacija i relacije (1) imamo

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

što je i trebalo dokazati.

Posledica ovoga stava je ta da se na osnovu njega i kod vektorskih jednakosti mogu vršiti premeštanja pojedinih vektora sa jedne strane jednakosti na drugu uz promenu znaka, a da se ekvivalencija ovih ne naruši.

PRIMER 1. Iz vektorske jednakosti $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ proizilazi ekvivalentna vektorska jednakost $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

1.7. MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM

Definicija 1. *Pod proizvodom vektora $\boldsymbol{a}$ i skalara k, koji se označava simbolom $k\boldsymbol{a}$ ili $\boldsymbol{a}k$, podrazumeva se vektor $\boldsymbol{b}$ koji ima pravac paralelan sa pravcem vektora $\boldsymbol{a}$, modul $|k|$ puta veći od modula vektora $\boldsymbol{a}$, a smer mu se poklapa sa smerom $\boldsymbol{a}$ za $k>0$ odnosno ima suprotan smer smeru vektora $\boldsymbol{a}$ za $k<0$. Za $k=0$ proizvod $k\boldsymbol{a}$ predstavlja nula-vektor, tj. $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.*

Definicija deljenja vektora $\boldsymbol{a}$ skalarom m $(m\neq 0)$, svodi se na prednju definiciju. Ovo deljenje se definiše kao množenje vektora $\boldsymbol{a}$ skalarom $\frac{1}{m}$.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{m}=\frac{1}{m}\boldsymbol{a}.$$

Na osnovu gornje definicije je:

$$\boldsymbol{b}=k\cdot\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}; \quad b=|k|\,a.$$

U specijalnom slučaju $k=-1$ imamo $\boldsymbol{b}=(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$, tj. množenjem vektora sa (-1) dolazi se do suprotnog vektora.

Za $k=\dfrac{1}{a}$ imaćemo:

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{a}.$$

Pošto je $a>0$, to vektor $\boldsymbol{b}$ ima pravac i smer vektora $\boldsymbol{a}$, a modul mu je a puta manji, tj. modul tog vektora biće jednak 1, tj.

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{a}\right|=a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

Definicija 2. *Jediničnim vektorom naziva se vektor čiji je modul jednak jedinici.*

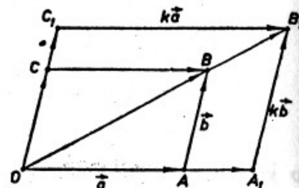
Jedinični vektor vektora $\boldsymbol{a}$ obeležavaćemo sa $\boldsymbol{a}_0$ ili ort $\boldsymbol{a}$, tj. prema napred rečenom je

$$\boldsymbol{a}_0=\text{ort}\,\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{a}.$$

Odavde je

$$a = a\,a_0,$$

tj. svaki vektor se može predstaviti kao proizvod modula tog vektora i jediničnog vektora istog pravca i smera.



Sl. 1.7.1

Za množenje vektora skalarom važi *distributivni zakon:*

$$k(a+b) = k\,a + k\,b.$$

Pretpostavimo da je $k > 0$. Tada je prema slici 1.7.1

$$\overrightarrow{OA} = a, \quad \overrightarrow{OA_1} = k\,a; \quad \overrightarrow{AB} = b, \quad \overrightarrow{A_1B_1} \parallel \overrightarrow{AB},$$

kao i

$$\sphericalangle O = \sphericalangle O \quad \text{i} \quad \sphericalangle A = \sphericalangle A_1,$$

te je $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$, a iz ove sličnosti proizilazi da je $k \cdot AB = A_1B_1$, $k \cdot OB = OB_1$ pa i $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$ tj.

$$k \cdot (a+b) = k\,a + k\,b,$$

što je trebalo i pokazati.

Čitalac može analogno da dokaže da distributivni zakon važi i za slučaj kada je $k \leq 0$.

1.8. LINEARNE KOMBINACIJE VEKTORA. KOLINEARNI I KOMPLANARNI VEKTORI. KOMPONENTE VEKTORA

Neka su dati: sistem od n vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i sistem od n skalara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Definicija 1. *Linearnom kombinacijom vektora naziva se zbir proizvoda vektora a_i i odgovarajućih skalara α_i, tj.*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Primer 1. Posmatrajmo sistem od n materijalnih tačaka masa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ koje su prema utvrđenom polu O određene vektorima položaja respektivno $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Vektor položaja r_c težišta ovog sistema po definiciji dat je relacijom

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

tj. r_c predstavlja linearnu kombinaciju vektora položaja $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Definicija 2. *Vektori sistema $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivaju se linearno zavisnim, ako postoji takav sistem skalara α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, od kojih je bar jedan različit od nule, da je linearna kombinacija*

$$\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

U protivnom slučaju vektori a_i su linearno nezavisni.

Stav 1. *Ako među vektorima sistema $a_1, a_2, \ldots, a_n$ postoji bar jedan nula-vektor, tada dati sistem predstavlja sistem linearno zavisnih vektora.*

Dokaz. Neka je, na primer, $a_n = 0$. Tada je mogućno izabrati takav sistem od n skalara α_i da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0, \qquad \alpha_n \neq 0,$$

pa će na osnovu toga linearna kombinacija vektora a_i biti

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0,$$

tj. vektori će obrazovati sistem linearno zavisnih vektora.

Posledica. *U sistemu linearno nezavisnih vektora ne postoje nula-vektori.*

Definicija 3. *Dva vektora, ili uopšte skup vektora predstavljaju kolinearne vektore, ako su njihovi nosači među sobom paralelni.*

Znači, dva kolinearna vektora mogu se razlikovati samo po modulu i smeru.

Tako, na primer, vektor a i vektor $b = k\,a$, po definiciji množenja vektora skalarom predstavljaju dva vektora koji imaju paralelne nosače, tj. ovi su vektori kolinearni. Stoga je u vektorskoj algebri relacijom

(1) $\qquad b = k\,a \qquad$ (k skalar)

izražena kolinearnost vektora a i b.

Stav 2. *Da bi dva vektora bila kolinearna potrebno je i dovoljno da su linearno zavisni.*

Uslov je dovoljan. Neka su a i b linearno zavisni vektori, tada to znači da egzistiraju dva takva skalara α i β koji nisu istovremeno jednaki nuli, da postoji relacija

$$\alpha\,a + \beta\,b = 0.$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada se prethodna relacija može napisati u obliku

$$a = -\frac{\beta}{\alpha}\,b, \quad \text{ili} \quad a = k\,b \quad \left(k = -\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

a odavde proizilazi da su vektori a i b kolinearni.

Uslov je potreban. Neka su a i b kolinearni vektori. Tada među njima postoji zavisnost

$$a = k\,b \quad \text{ili} \quad a - k\,b = 0.$$

Stavljajući $\alpha = 1$, $\beta = -k$ dobijamo $\alpha\,a + \beta\,b = 0$, tj. vektori a i b su linearno zavisni.

Posledica. *Ako se zna da su a i b nekolinearni vektori, tada je vektorska relacija $\alpha\,a + \beta\,b = 0$ mogućna samo u slučaju kada je $\alpha = \beta = 0$.*

Definicija 4. *Za tri ili više vektora kaže se da su komplanarni, ako leže u jednoj ravni, ili su paralelni sa ovom ravni.*

Ako posmatramo dva vektora a i b, tada vektori $\overrightarrow{OA_1} = k\,a$, $\overrightarrow{A_1B_1} = l\,b$ i $\overrightarrow{OB_1} = c_1$ leže u jednoj ravni i to ravni paralelograma $O_1A_1B_1C_1$ konstruisanog nad vektorim $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{A_1B_1}$. Ovde je dakle

$$c_1 = k\,a + l\,b.$$

U opšem slučaju iz paralelograma konstruisanog nad vektorima $k\boldsymbol{a}$ i $l\boldsymbol{b}$ proizilazi da će ova dva vektora i njihov geometrijski zbir

$$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$$

predstavljati vektore koji leže u ravni ovoga paralelograma, tj. ova tri vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ su komplanarni. Zato ova jednakost predstavlja *uslov komplanarnosti* ovih vektora.

Stav 3. *Da bi tri vektora bili komplanarni potrebno je i dovoljno da oni budu linearno zavisni.*

Dokaz. *Uslov je potreban.* Neka su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ linearno zavisni vektori, tj. postoji relacija

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0,$$

gde je bar jedan od skalara α, β, γ različit od nule. Neka je, na primer, $\gamma\neq 0$, tada se prethodna relacija može napisati u obliku

$$\boldsymbol{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\boldsymbol{a}-\frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{b}, \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b} \quad \left(k=-\frac{\alpha}{\gamma},\ l=-\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Poslednja vektorska jednakost pokazuje da je $\boldsymbol{c}$ vektor dijagonale paralelograma konstruisanog nad vektorima $k\boldsymbol{a}$ i $l\boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{c}$ leži u istoj ravni sa ovim vektorima.

Uslov je dovoljan. Neka su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ komplanarni vektori. Posmatrajmo najpre slučaj kada vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nisu kolinearni. Tada je moguće vektor $\boldsymbol{c}$ napisati u obliku

$$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}, \quad \text{ili} \quad k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=0.$$

Kako je $-1\neq 0$, to su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ linearno zavisni vektori.

Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ kolinearni vektori, tada su oni na osnovu prethodne teoreme linearno zavisni, tj. $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=0$, gde bar jedan od skalara α i β nije jednak nuli. No tada je u važnosti i relacija

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+0\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

što znači da su vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ linearno zavisni.

Posledica. *Ako vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nisu komplanarni, tada je relacija*

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0$$

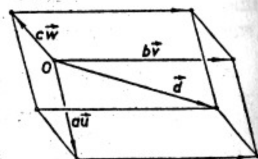
u važnosti samo u slučaju kada su sva tri skalara α, β, γ jednaki nuli.

Stav 4. *Između proizvoljna četiri vektora $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{d}$ trodimenzionog euklidskog prostora postoji linearna zavisnost.*

Dokaz. Ako su $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ komplanarni vektori, tada su oni, na osnovu prethodne teoreme linearno zavisni, tj. postoje tri skalara a, b, c od kojih bar jedan nije nula, takvi da je $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}=0$. Ali tada postoji i relacija

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}+0\cdot\boldsymbol{d}=0$$

čime je dokazana linearna zavisnost vektora $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{d}$.



Sl. 1.8.1.

Ako $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ nisu komplanarni, tada se vektor $\boldsymbol{d}$ može razložiti na komponente duž tih vektora, tj.

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{d}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w},$$

ili

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}+(-1)\boldsymbol{d}=0,$$

tj. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{d}$ su linearno zavisni vektori (sl. 1.8.1).

Razlaganje vektora $\boldsymbol{d}$ duž $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je *jedinstveno*, jer ako imamo dva razlaganja:

$$\boldsymbol{d}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{d}=a'\boldsymbol{u}+b'\boldsymbol{v}+c'\boldsymbol{w},$$

oduzimanjem dobijamo:

$$0=(a-a')\boldsymbol{u}+(b-b')\boldsymbol{v}+(c-c')\boldsymbol{w}.$$

Ako bar jedna od razlika u zagradama nije jednaka nuli, vektori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ bi bili komplanarni, što je suprotno pretpostavci. Zato mora biti

$$a-a'=0, \quad b-b'=0, \quad c-c'=0, \quad \text{tj.} \quad a'=a, \quad b'=b, \quad c'=c,$$

tj. razlaganje (4) vektora $\boldsymbol{d}$ duž tri nekomplanarna vektora $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je jedinstveno.

Mogućnost da se svaki vektor može razložiti na gornji način u tri linearno nezavisne komponente i da je ovo razlaganje jedinstveno predstavlja jednu od karakteristika euklidskog prostora od tri dimenzije.

1.9. PROJEKCIJA VEKTORA NA OSU. KOORDINATE VEKTORA. DESNI I LEVI KOORDINATNI SISTEM. VEKTOR POLOŽAJA TAČKE

Definicija 1. *Orijentisanom pravom ili osom naziva se prava za čije je dve proizvoljne tačke utvrđeno, koja se od njih smatra prethodnom, a koja sledećom. Orijentisana prava ili osa može biti karakterisana jediničnim vektorom $\boldsymbol{u}$.*

Definicija 2. *Ortogonalnom projekcijom vektora $\boldsymbol{a}$ na osu $\boldsymbol{u}$ naziva se dužina odsečka $A'B'$ koje bilo prave paralelne sa $\boldsymbol{u}$, koji odvajaju ravni povučene kroz krajeve A i B vektora $\boldsymbol{a}$ upravno na $\boldsymbol{u}$ uzeta sa znakom $+$ ili $-$, prema tome da li vektor $\overrightarrow{A'B'}$ ima isti ili suprotan smer sa jediničnim vektorom ose $\boldsymbol{u}$.*

Kako je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ kolinearan sa jediničnim vektorom ose $\boldsymbol{u}$, to je

$$\overrightarrow{A'B'}=k\boldsymbol{u},$$

gde skalar k predstavlja, s obzirom na napred datu definiciju, algebarsku projekciju vektora $\boldsymbol{a}$ na osu $\boldsymbol{u}$.

Projekciju vektora $\boldsymbol{a}$ na osu $\boldsymbol{u}$ označavamo sa a_u, ili $\text{proj}_u\boldsymbol{a}$.

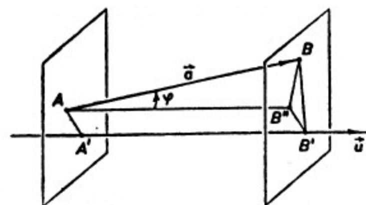
Povucimo kroz tačku A do preseka sa ravni koja je upravna na $\boldsymbol{u}$, a prolazi kroz B pravu AB'', tada je $AB''=A'B'$. Iz pravouglog trougla ABB'' (sl. 1.9.1) projekcija vektora $\boldsymbol{a}$ na osu $\boldsymbol{u}$ je

$$a_u=\text{proj}_u\boldsymbol{a}=a\cos\varphi,$$

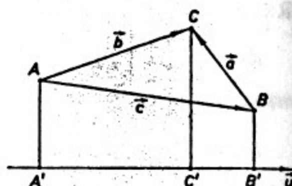
gde je φ ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{u}$.

Dakle, *projekcija vektora na osu jednaka je proizvodu iz modula toga vektora i kosinusa ugla između vektora i ose.*

Ako je $\varphi<\frac{\pi}{2}$ to iz pravouglog trougla ABB'' i prednjeg rezultata proizilazi da vektor $\overrightarrow{A'B'}$ ima smer jediničnog vektora $\boldsymbol{u}$.



Sl. 1.9.1.



Sl. 1.9.2.

Ako je ugao φ veći od $\frac{\pi}{2}$, projekcija vektora $\boldsymbol{a}$ je

$$A'B'=a\cos(\pi-\varphi),$$

i tada $\overrightarrow{AB'}$ ima smer suprotan jediničnom vektoru $\boldsymbol{u}$. Ovde je projekcija

$$a_u=\text{proj}_u\boldsymbol{a}=-A'B'=-a\cos(\pi-\varphi)=a\cos\varphi.$$

Najzad za $\varphi=\frac{\pi}{2}$ projekcija je $a_u=0$.

Stav 1. *Projekcija geometrijske sume vektora na osu* $\boldsymbol{u}$ *jednaka je algebarskoj sumi projekcija vektora-sabiraka na ovu osu:*

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_u=a_{1u}+a_{2u}+\cdots+a_{nu},$$

ili

$$\text{proj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\text{proj}_u\boldsymbol{a}_1+\text{proj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\text{proj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti za zbir dva vektora, tj. polazeći od

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a},$$

pokazaćemo da je

$$\text{proj}_u\boldsymbol{b}=\text{proj}_u\boldsymbol{c}+\text{proj}_u\boldsymbol{a}.$$

Iz slike 1.9.2, pre svega, proizilazi da je za tačke A', B', C' na osi

$$A'B'+B'C'+C'A'=0,$$

gde je svaki od ovih odsečaka uzet sa znakom + ili —, prema tome da li je usmeren kao i vektor $\boldsymbol{u}$, ili ima ovome suprotan smer. No, s obzirom da C' leži između A' i B' imamo:

$$A'C'+C'B'=A'B'.$$

Pošto je $-C'B'=B'C'$, $-A'C'=C'A'$, prethodna jednakost daje

$$A'B'+B'C'+C'A'=0.$$

Kako je

$$\text{proj}_u\boldsymbol{a}=B'C',\quad \text{proj}_u\boldsymbol{b}=A'C',$$
$$\text{proj}_u\boldsymbol{c}=A'B',$$

iz poslednje jednakosti imamo:

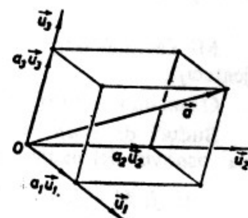
$$A'C'=A'B'+B'C',$$

tj.

$$\text{proj}_u\boldsymbol{b}=\text{proj}_u\boldsymbol{c}+\text{proj}_u\boldsymbol{a},$$

ili

$$\text{proj}_u(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=\text{proj}_u\boldsymbol{c}+\text{proj}_u\boldsymbol{a}.$$



Sl. 1.9.3.

Definicija 3. *Trijedrom vektora naziva se uređeni skup od tri nekomplanarna vektora* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Pošto skup od tri vektora može biti uređen na šest različitih načina, to se sa tri nekomplanarna vektora mogu definisati šest trijedara.

Najjednostavniji trijedar je onaj koji obrazuju tri nekomplanarna jedinična vektora $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$.

Prema onome što je rečeno u prethodnom paragrafu, možemo proizvoljni vektor $\boldsymbol{a}$ razložiti u komponente duž osa trijedra $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]$, pa će biti

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3.$$

Ako je trijedar jediničnih vektora fiksiran, tada skalari a_1, a_2, a_3 potpuno određuju vektor $\boldsymbol{a}$ i nazivaju se *koordinatama* toga vektora (sl. 1.9.3).

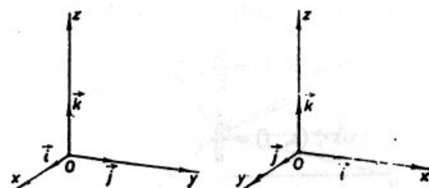
Činjenicu da je vektor $\boldsymbol{a}$ određen sa svoje tri koordinate obeležavaćemo na sledeći način: $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

Ako su jedinični vektori trijedra uzajamno upravni, trijedar je *ortogonalan*. Ovakav trijedar obrazuju i tri uzajamno upravne ose — *koordinatne ose* koje prolaze kroz jednu utvrđenu tačku O — *koordinatni početak*, definisane sa tri nekomplanarna jedinična vektora koje ćemo označiti sa $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$.

Definicija 4. *Uređeni skup tri ose koje prolaze kroz utvrđeni pol O (početak) i koje su uzajamno upravne, obrazuju Dekartov pravougli koordinatni sistem.*

Ravni koje prolaze kroz dve od osa ovoga sistema nazivaju se *koordinatnim ravnima*. Njima je prostor podeljen na osam *oktanata*.

U primenama se koriste dva pravougla sistema (sl. 1.9.4) i to: *desni* (*engleski*) i *levi* (*francuski*). Kod desnog (engleskog) pravouglog sistema ili *trijedra osa desne orijentacije* rotacija ose OX prema osi OY oko ose OZ najkraćim putem sleduje u smeru suprotnom kretanju skazaljke na časovniku; kod levog (francuskog) sistema ili *trijedra leve orijentacije* rotacija ose OX prema OY oko ose OZ najkraćim putem sleduje u smislu kretanja skazaljke na časovniku.



Sl. 1.9.4.

Trijedar osa desne orijentacije može biti predstavljen sa tri prsta desne ruke (palcem — osa OX, kažiprstom — osa OY i velikim prstom — osa OZ); trijedar leve orijentacije može biti predstavljen odgovarajućim prstima leve ruke.

Mi ćemo u daljim izlaganjima upotrebljavati pravougli trijedar osa desne orijentacije.

Označimo ovakav trijedar simbolički u obliku $[i, j, k]$.

Budući da skup ova tri nekomplanarna vektora predstavlja uređen skup, a na osnovu definicije trijedra određene orijentacije možemo zaključiti da je

$$[i, j, k]=[j, k, i]=[k, i, j],$$

tj. *cikličkim premeštanjem vektora u prvom skupu ne menja se orijentacija trijedra koji oni obrazuju.*

Promenimo li, na primer, poredak prva dva vektora i i j, tada trijedri $[i, j, k]$ i $[j, i, k]$ imaju *suprotnu orijentaciju*, tj. simbolički napisano

$$[i, j, k]=-[j, i, k].$$

Takođe važe jednakosti:

$$[i, j, k]=[j, k, i]=[k, i, j]=-[j, i, k]=-[k, j, i]=-[i, k, j].$$

Ako su projekcije vektora a na ose pravouglog sistema: a_1 na osu OX, a_2 na osu OY i a_3 na osu OZ, tada je:

$$a=a_1 i+a_2 j+a_3 k.$$

Projekcije a_1, a_2, a_3 nazivaju se i *pravouglim koordinatama vektora* a, tj. u Dekartovom pravouglom sistemu pravougle koordinate vektora se poklapaju sa njegovim projekcijama na koordinatne ose. Ako vektor a ima za pravougle koordinate (projekcije) skalare a_1, a_2, a_3 označavamo:

$$a=(a_1, a_2, a_3).$$

Ove tri projekcije na ose OX, OY i OZ određuju se iz obrazaca:

$$a_1=a\cos\sphericalangle(a, i), \quad a_2=a\cos\sphericalangle(a, j), \quad a_3=a\cos\sphericalangle(a, k).$$

Tri projekcije a_1, a_2, a_3 potpuno određuju vektor a. U stvari, iz pravouglog paralelepipeda (sl. 1.9.5) modul vektora a je kao dijagonala jednak:

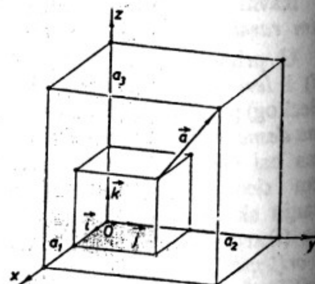
$$a=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2},$$

a pravac i smer tog vektora su određeni iz gornjih obrazaca kosinusima uglova koje taj vektor zaklapa sa jediničnim vektorima i, j, k, tj.

$$\cos\sphericalangle(a, i)=\frac{a_1}{a},$$

$$\cos\sphericalangle(a, j)=\frac{a_2}{a},$$

$$\cos\sphericalangle(a, k)=\frac{a_3}{a}.$$



Sl. 1.9.5.

Kvadriranjem i sabiranjem ovih relacija, a uzimajući u obzir onu za određivanje a, nalazimo

$$\cos^2\sphericalangle(a, i)+\cos^2\sphericalangle(a, j)+\cos^2\sphericalangle(a, k)=1.$$

Ako su dva vektora jednaka, tj. $a=b$ i ako su oni dati svojim projekcijama $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$ tada iz $a=b$ proizilazi

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2, \quad a_3=b_3.$$

Ako je

$$b=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i \text{ i } b=(b_1, b_2, b_3), \quad a_i=(a_1^i, a_2^i, a_3^i)$$

$(i=1, 2, \dots, n;\ \lambda_i$ skalari),

to je

$$b_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_1^i, \quad b_2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_2^i, \quad b_3=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_3^i.$$

Definicija 5. *Vektorom položaja* r *tačke* M *u prostoru naziva se vektor sa početkom u polu O (koordinatnom početku) i krajem u tački M.*

Projekcije (koordinate) vektora položaja $r=(x, y, z)$ nazivaju se i *koordinatama tačke M* što pišemo u obliku $M(x, y, z)$ pri čemu se prva od ovih koordinata naziva *apscisom*, druga *ordinatom* i treća *aplikatom* tačke M.

Znaci koordinata tačke M u pojedinim oktantima su sledeći:

	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	+	+	—
II	—	+	+	VI	—	+	—
III	—	—	+	VII	—	—	—
IV	+	—	+	VIII	+	—	—

Prema tome, položaj tačke u prostoru je potpuno određen njenim vektorom položaja ili sa njene tri koordinate (koordinatne tačke M).

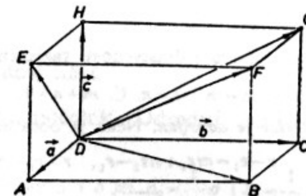
Iz napred izloženog je

$$r=|r|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad x=r\cos\sphericalangle(r, i), \quad y=r\cos\sphericalangle(r, j), \quad z=r\cos\sphericalangle(r, k),$$

odakle je

$$\cos\sphericalangle(r, i)=\frac{x}{r}, \quad \cos\sphericalangle(r, j)=\frac{y}{r}, \quad \cos\sphericalangle(r, k)=\frac{z}{r} \quad (r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}).$$

Na osnovu ovih obrazaca moguće je iz datih projekcija vektora položaja r odrediti njegov modul, pravac i smer, tj. taj vektor u potpunosti će biti određen ako se poznaju tri skalara x, y, z — njegove projekcije (koordinate) na ose Dekartovog pravouglog sistema.



Sl. 1.9.6.

ZADATAK 1. Ivice pravouglog paralelepipeda predstavljene su vektorima a, b i c, čiji je početak u jednom njegovom temenu (sl. 1.9.6).

Odrediti zbir vektora — dijagonala pravougaonika, čiji je početak u ovom temenu.

Rešenje. Iz slike 1.9.6 imamo

$$\overrightarrow{DB}=a+b,\quad \overrightarrow{DE}=a+c,\quad \overrightarrow{DG}=b+c,$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=2(a+b+c)=2\cdot\overrightarrow{DF}.$$

ZADATAK 2. Koji uslov treba da zadovoljavaju tri vektora a, b i c, da bi obrazovali trougao?

ZADATAK 3. Dokazati da je mogućno konstruisati trougao, čije su strane jednake težišnim linijama datoga trougla.

Rešenje. Neka su stranice trogla ABC predstavljene vektorima $\overrightarrow{AB}=c$, $\overrightarrow{BC}=a$, $\overrightarrow{CA}=b$, a težišne linije vektorima $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Tada je $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=c+\frac{1}{2}a$, $\overrightarrow{BB_1}=a+\frac{1}{2}b$, $\overrightarrow{CC_1}=b+\frac{1}{2}c$.

Sabiranjem ovih jednakosti nalazimo;

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{3}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}\cdot 0=0,$$

čime je dokazano da i vektori $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ i $\overrightarrow{CC_1}$ obrazuju zatvoreni poligon, tj. od njih se može konstruisati trougao.

ZADATAK 4. Odrediti vektor položaja r sredine M duži $\overrightarrow{M_1M_2}$ ako su r_1 i r_2 vektori položaja respektivno tačaka M_1 i M_2.

Rešenje. Iz uslova zadatka proizilazi $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{MM_2}$, tj.

$$r-r_1=r_2-r,\qquad r=\frac{1}{2}(r_1+r_2).$$

ZADATAK 5. Pokazati da je potreban i dovoljan uslov za to da tri tačke $M_1=(r_1)$, $M_2=(r_2)$ i $M=(r)$, pri čemu je $r=mr_1+nr_2$, leže na jednoj pravoj liniji, izražen relacijom $m+n=1$.

Rešenje. Uslov je potreban. Neka tačke M_1, M_2 i M leže na jednoj, pravoj, tada su vektori $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M}$ kolinearni, tj.

$$r-r_1=\lambda(r_2-r_1),$$

odakle je

$$r=(1-\lambda)r_1+\lambda r_2$$

Na osnovu jedinstvenosti razlaganja vektora r duž r_1 i r_2 mora biti

$$1-\lambda=m \text{ i } \lambda=n, \text{ tj. } m+n=1.$$

Uslov je dovoljan. Neka je obratno $m+n=1$, tada je

$$r-r_1=mr_1+nr_2-r_1,\quad r-r_1=mr_1+nr_2-(m+n)r_1,\quad \text{ili}\quad r-r_1=n(r_2-r_1).$$

Pošto je $r-r_1=\overrightarrow{M_1M}$, a $r_2-r_1=\overrightarrow{M_1M_2}$, to iz poslednje relacije proizilazi da su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$ kolinearni, a pošto im početak leži u tački M_1, to znači da tačke M_1, M_2 i M leže na jednoj pravoj liniji.

ZADATAK 6. Dokazati da se težišne linije trougla ABC, gde je $A=(r_1)$, $B=(r_2)$, $C=(r_3)$ seku u jednoj tački i odrediti vektor položaja ove tačke.

Rešenje. Vektor položaja sredine A_1 strane BC je

$$r'=\frac{1}{2}(r_2+r_3),$$

to je vektor položaja proizvoljne tačke prave kroz A i A_1

(1) $$r=mr_1+\frac{1-m}{2}(r_2+r_3).$$

Analogno je vektor položaja proizvoljne tačke težišne linije BB_1

$$r=nr_2+\frac{1-n}{2}(r_3+r_1).$$

U tački preseka ovih dveju težišnih linija je

$$mr_1+\frac{1-m}{2}(r_2+r_3)=nr_2+\frac{1-n}{2}(r_3+r_1),$$

odakle je

$$mr_1+\frac{1-m}{2}r_2+\frac{1-m}{2}r_3=\frac{1-n}{2}r_1+nr_2+\frac{1-n}{2}r_3,$$

a ova jednakost će biti zadovoljena za proizvoljni trougao ako je

$$m=\frac{1}{2}(1-n),\quad \frac{1}{2}(1-m)=n,\quad \frac{1}{2}(1-m)=\frac{1}{2}(1-n).$$

Nije teško utvrditi da je jedna od jednačina ovoga sistema algebarska posledica drugih dveju, te se iz dve od njih nalazi $m=n=1/3$.

Zamenom $m=1/3$ npr. u (1) nalazimo za vektor položaja težišta:

$$r_s=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3).$$

Vektor položaja proizvoljne tačke težišne linije CC_1 je

$$r=pr_3+\frac{1-p}{2}(r_3+r_1),$$

te npr. u presečnoj tački ove sa težišnom linijom AA_1 mora biti

$$pr_3+\frac{1-p}{2}(r_3+r_1)=mr_1+\frac{1-m}{2}(r_2+r_3),$$

odakle se analognim rezonovanjem gornjem nalazi $m=p=1/3$, te npr. na osnovu pretposlednje relacije za $p=1/3$ tačka preseka S' težišnih linija CC_1 i AA_1 ima vektor položaja

$$r_s'=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3).$$

Znači, $r_s'=r_s$, tj. težišne linije trougla seku se u jednoj tački.

ZADATAK 7. Dva vektora a i b imaju zajednički početak. Odrediti jedinični vektor simetrale ugla koji obrazuju ovi vektori.

Rešenje. Jedinični vektori pravca i smera respektivno vektora a i b su $a_0=\frac{1}{a}a$ i $b_0=\frac{1}{b}b$. Paralelogram konstruisan nad vektorima a_0 i b_0 je romb, te vektor e njegove dijagonale koja prolazi kroz teme ugla je

$$e=a_0+b_0,\quad \text{tj.}\quad e=\frac{1}{a}a+\frac{1}{b}b.$$

Nosač ovoga vektora predstavlja simetralu ovog ugla i njen jedinični vektor je $e_0 = \frac{1}{e}\,e$.

ZADATAK 8. Dokazati da su vektori

$$A = nc - pb, \quad B = pa - mc, \quad C = mb - na$$

komplanarni (m, n, p skalari; a, b, c nekomplanarni vektori).

Rešenje. Ako pokažemo da se npr. vektor C može na jedinstveni način da razloži duž vektora A i B, tada će biti dokazana komplanarnost ovih vektora. Odredimo dva skalara λ i μ tako da bude

$$C = \lambda A + \mu B, \quad \text{tj.} \quad mb - na = \lambda(nc - pb) + \mu(pa - mc).$$

Pošto vektori a, b i c nisu komplanarni, to iz poslednje jednačine sleduje:

$$m = -\lambda p, \qquad -n = \mu p, \qquad \lambda n + \mu m = 0,$$

odakle je $\lambda = -\frac{m}{p}$, $\mu = -\frac{n}{p}$, tj. $C = -\frac{m}{p}A - \frac{n}{p}B$. Vektori A, B, C su komplanarni.

ZADATAK 9. U krugu poluprečnika 1 upisan je pravilan poligon $A_0A_1 \cdots A_{n-1}$ (sl. 1.9.7). Njegova strana $\overrightarrow{A_0A_1}$ zaklapa sa osom OX ugao α_0, a svaka sledeća strana zaklapa za $\frac{2\pi}{n}$ veći ugao nego prethodna strana. Pokazati da je

$$\cos\alpha_0 + \cos\left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha_0 + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\alpha_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

Rešenje. Iz vektorske relacije:

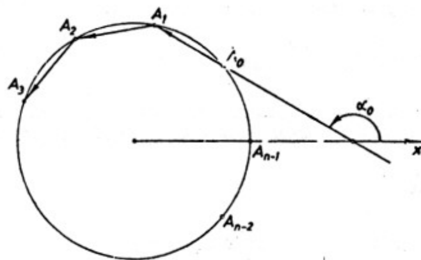
$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_0} = 0$$

sleduje

$$\text{proj}_{\overrightarrow{OX}}\overrightarrow{A_0A_1} + \text{proj}_{\overrightarrow{OX}}\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \text{proj}_{\overrightarrow{OX}}\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \text{proj}_{\overrightarrow{OX}}\overrightarrow{A_{n-1}A_0} = 0.$$

Pošto je $A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_0$, prethodna jednakost daje

$$\cos\alpha_0 + \cos\left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha_0 + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\alpha_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$



Sl. 1.9.7.

Odavde za $\alpha_0 = 0$ dobijamo

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,$$

a za $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

1.10. SKALARNI PROIZVOD DVA VEKTORA

Definicija 1. *Skalarnim proizvodom vektora **a** i **b** naziva se skalar koji je jednak proizvodu modula ovih vektora i kosinusa ugla koji oni zaklapaju.*

Po ovoj definiciji, skalarni proizvod vektora a i b jednak je

$$ab\cos\sphericalangle(a, b)$$

i označava se na jedan od sledećih načina:

$a \cdot b$	(GIBSova oznaka);
ab	(HEAVISIDEova oznaka);
$(ab) = (a, b)$	(LORENZova oznaka).

Prema tome, možemo pisati

(1) $\quad ab = ab\cos\sphericalangle(a, b).$

Kako je

$$b\cos\sphericalangle(a, b) = \text{proj}_a b, \qquad a\cos\sphericalangle(a, b) = \text{proj}_b a,$$

iz (1) proizilazi:

(2) $\quad ab = a\,\text{proj}_a b = b\,\text{proj}_b a.$

Prema tome, gornja definicija skalarnog proizvoda može se formulisati i na sledeći način:

Definicija 2. *Skalarnim proizvodom vektora **a** i **b** naziva se skalar jednak proizvodu modula jednog od ovih vektora i projekcije drugog na osu prvog vektora.*

Ako je, na primer, a jedinični vektor, tj. $a = 1$, tada iz (2) proizilazi

$$\text{proj}_a b = ab \quad (a \text{ jedinični vektor}).$$

To znači da se *projekcija vektora **b** na osu jediničnog vektora **a** može predstaviti kao skalarni proizvod iz jediničnog vektora ove ose i vektora **b**.*

PRIMER. 1. Znajući da je vektor položaja tačke u prostoru

$$r = xi + yj + zk,$$

gde su x, y, z projekcije ovoga vektora respektivno na ose definisane jediničnim vektorima i, j, k dobijamo

$$x = ri, \quad y = rj, \quad z = rk,$$

tj. može se pisati:

$$r = (ri)i + (rj)j + (rk)k.$$

Napred data definicija skalarnog proizvoda dva vektora ima sledeću *fizikalnu interpretaciju*. Ako se sa F označi vektor sile, a sa s vektor pomeranja, tada se rad A sile F, na pomeranju s, definiše proizvodom

$$A = F \cdot s \cdot \cos\sphericalangle(F, s), \quad \text{tj.} \quad A = Fs.$$

Znači, ako je u skalarnom proizvodu jedan od činilaca sila, a drugi predstavlja vektor pomeranja, tada njihov skalarni proizvod predstavlja *rad ove sile na tome pomeranju.*

Skalarni proizvod ima sledeće osobine.

Kako je $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})>0$ ako je $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ oštar, a $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})<0$ ako je $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tup ugao, to $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ predstavlja skalar koji može biti pozitivan odnosno negativan. Ako je $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$, tada je $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=ab$; a ako je $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\pi$, tada je $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=-ab$. Kako je $|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|\leq 1$, to je

$$-ab\leq \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\leq ab.$$

Kako je $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=0$, to je po definiciji

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}=a\cdot a\cos 0=a^2,$$

tj. *skalarni proizvod dva jednaka vektora jednak je kvadratu modula ovog vektora.* U upotrebi je sledeća oznaka:

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=a^2.$$

Ako je $\boldsymbol{a}_0$ jedinični vektor, tada je prema ovome

$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}_0{}^2=1.$$

U algebri skalara može biti $ab=0$ u slučajevima:

a) $a=0,\ b\neq 0$; b) $a\neq 0,\ b=0$; c) $a=0,\ b=0$,

tj. proizvod ab može biti jednak nuli ako je jedan ili ako su oba činioca jednaka nuli.

Međutim, iz definicije skalarnog proizvoda $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=ab\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sleduje da može biti $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=0$ u jednom od ovih slučajeva: a) ako je jedan od činilaca $\boldsymbol{a}$ ili $\boldsymbol{b}$ odnosno ako su oba činioca $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$—nula-vektori (njihovi moduli jednaki nuli); b) ako je $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$, tj. $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\pi/2$, pri čemu je $\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$.

To znači da je skalarni proizvod dva vektora koji nisu nula-vektori jednak nuli ako su ovi vektori upravni.

Dakle, jednakost $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=0$, pri čemu je $\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$ predstavlja uslov upravnosti vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Za skalarno množenje dva vektora važe sledeći *zakoni množenja.*

Komutativni zakon izražen relacijom $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$, tj. *vrednost skalarnog proizvoda dva vektora se ne menja ako se činiocima promene mesta.*

Zaista, po definiciji je

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=ab\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \text{ i } \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}=ba\cos\sphericalangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Međutim je $\sphericalangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})=-\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, ali zbog parnosti kosinusa

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})=\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

je

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}=ab\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}.$$

Distributivni zakon izražen je relacijom:

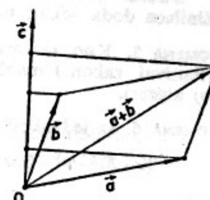
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}.$$

Dovedimo vektore $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ na zajednički početak (sl. 1.10.1). Po definiciji skalarnog proizvoda dva vektora je

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=c\ \text{proj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Prema slici, a na osnovu stava o projekcijama je

$$\text{proj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b},$$



Sl. 1.10.1.

te prethodna relacija daje

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=c\cdot(\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}).$$

Kako za množenje skalara važi distributivni zakon, to je

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=c\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+c\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}.$$

Međutim, po definiciji skalarnog proizvoda je:

$$c\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c},\quad c\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{c},$$

te je

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}.$$

Skalarni proizvod dva vektora ima ***osobinu asocijativnosti*** u odnosu na skalarni činilac, tj. ovde je na primer

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\lambda=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\,\lambda).$$

Proizvod na levoj strani je

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\lambda=ab\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\cdot\lambda,$$

a na desnoj

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\,\lambda)=a\cdot b\,\lambda\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,\lambda)=ab\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\cdot\lambda=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\lambda.$$

U specijalnom slučaju je:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_0)\,b\qquad(\boldsymbol{b}_0=\text{ort}\ \boldsymbol{b}).$$

NAPOMENA 1. Proizvod većeg broja činilaca npr. $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$ nema smisla. Isto tako nema smisla $\boldsymbol{a}^n$ $(n>2)$.

NAPOMENA 2. Iz relacije $\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$ ne sleduje uopšte $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, tj. ova se relacija uopšte ne može „podeliti" sa $\boldsymbol{c}$. Iz nje, međutim, proizilazi

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}=0,\quad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,\quad \text{tj. za } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b} \text{ je } \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}.$$

NAPOMENA 3. Iz skalarne jednačine $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=m$ iz poznate vrednosti skalarnog proizvoda m i poznatog činioca $\boldsymbol{a}$ *ne može se jednoznačno odrediti* činilac $\boldsymbol{x}$.

Zaista, pošto je $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=a\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$, to je $a\cdot\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}=m$, odakle je

$$\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}=m/a\qquad(\boldsymbol{a}\neq 0),$$

tj. relacijom $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=m$ određena je jednoznačno projekcija vektora $\boldsymbol{x}$ na osu vektora $\boldsymbol{a}$. Međutim, geometrijsko mesto krajeva svih vektora $\boldsymbol{x}$ koji zadovoljavaju relaciju $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=m$ (ako imaju početak u fiksnoj tački — polu) je ravan upravna na vektoru $\boldsymbol{a}$. Projekcije svih ovih vektora na osu vektora $\boldsymbol{a}$ imaju vrednost m/a.

NAPOMENA 4. Ako je $b_1 \perp a$, tada je $ab_1 = 0$. Stoga je

$$a \cdot (b + b_1) = ab + ab_1 = ab.$$

Odavde proizilazi da skalarni proizvod ab ne menja svoju vrednost ako se jednom od činilaca doda vektor upravan na drugom činiocu.

NAPOMENA 5. Kod skalarnog proizvoda dve linearne kombinacije vektora treba primeniti distributivni zakon i množenje vršiti analogno postupku za množenje dva polinoma u skalarnoj algebri.

NAPOMENA 6. Iz jednakosti

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

proizilazi

$$|a+b| = (a^2 + 2\,ab + b^2)^{1/2}.$$

Ukoliko je $|b|$ infinitezimala višega reda u poređenju sa $|a|$ biće

$$|a+b| = |a| \cdot \left(1 + 2\frac{ab}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} = |a| \left[1 + \frac{ab}{a^2} + o\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right]$$

Odavde se dobija aproksimativna jednakost za $|a+b|$ u obliku

$$|a+b| \approx |a| + \frac{ab}{|a|}.$$

PRIMER 1. $(a+b)\cdot(a-b) = aa + ba - ab - bb = a^2 - b^2 = a^2 - b^2$.

Iz definicione relacije $ab = ab \cos \sphericalangle (a, b)$ proizilazi sledeći obrazac za izračunavanje ugla između vektora a i b:

$$\cos \sphericalangle (a, b) = \frac{ab}{ab}.$$

Za $a = b = 1$ je

$$\cos \sphericalangle (a_0, b_0) = a_0 b_0 \qquad (a_0 \text{ i } b_0 \text{ jedinični vektori}).$$

Poslednje dve relacije se primenjuju u analitičkoj geometriji.

Pošto jedinični vektori i, j, k osa Dekartovog pravouglog sistema imaju projekcije

$$i = (1,\ 0,\ 0), \quad j = (0,\ 1,\ 0), \quad k = (0,\ 0,\ 1)$$

i pošto su ovi vektori po dva i dva među sobom upravni, to su njihovi skalarni proizvodi:

$$ii = i^2 = 1, \quad jj = j^2 = 1, \quad kk = k^2 = 1, \quad ij = 0, \quad jk = 0, \quad ki = 0.$$

Ako su vektori a i b dati svojim projekcijama

$$a = (a_1,\ a_2,\ a_3), \quad b = (b_1,\ b_2,\ b_3),$$

tada je skalarni proizvod ovih vektora:

$$ab = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k).$$

Primenjujući distributivni zakon za množenje linearnih kombinacija jediničnih vektora na desnoj strani poslednje relacije i koristeći gornje vrednosti za skalarne proizvode ovih vektora, nalazimo:

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Poslednja relacija predstavlja *analitički izraz za skalarni proizvod* vektora a i b. Ovaj analitički izraz služi za izračunavanje vrednosti skalarnog proizvoda ako su činioci dati svojim projekcijama na ose Dekartovog pravouglog sistema.

Iz poslednje jednakosti za $b = a$ proizilazi

$$aa = a^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

tj. modul vektora a je

$$a = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$$

Kako skalarni proizvod ab ne zavisi od koordinatnog sistema, analitički izraz ovog proizvoda je *invarijantan* u odnosu na sve pravougle koordinatne sisteme, tj.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3',$$

gde su $(a_1',\ a_2',\ a_3')$ i $(b_1',\ b_2',\ b_3')$ projekcije vektora a odnosno b u odnosu na bilo koji drugi pravougli koordinatni sistem.

Na osnovu analitičkog izraza za skalarni proizvod dva vektora, kosinus ugla između vektora a i b dat je ovim analitičkim obrascem:

$$\cos \sphericalangle (a, b) = ab/ab = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)/\{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}\}.$$

Ako su $a_0 = (\cos \alpha_1,\ \cos \beta_1,\ \cos \gamma_1)$ i $b_0 = (\cos \alpha_2,\ \cos \beta_2,\ \cos \gamma_2)$ jedinični vektori, tada je

$$\cos \sphericalangle (a_0, b_0) = a_0 b_0 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2,$$

tj. $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = a_0^2 = 1$ za $b_0 = a_0$.

Uslov upravnosti vektora a i b, tj. $ab = 0$ analitički se može predstaviti obrascem:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

ZADATAK 1. Izvesti kosinusni (CARNOTOV) stav za trougao vektorskim putem.

Rešenje. Ako su $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{CA}$, $c = \overrightarrow{BA}$ vektori strana trougla ABC, imamo

$$c = a + b.$$

Odavde je

$$cc = (a+b,\ a+b) = aa + 2\,ab + bb, \quad \text{tj.} \quad c^2 = a^2 + 2\,ab \cos \sphericalangle (a, b) + b^2.$$

Kako je $\sphericalangle (a, b) = \pi - C$, to je $\cos \sphericalangle (a, b) = -\cos C$, te je $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$.

ZADATAK 2. U kosouglom trijedru osa definisanom jediničnim vektorima e_1, e_2, e_3, dati su vektori a i b svojim projekcijama: $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$; $b = (b_1,\ b_2,\ b_3)$.

Odrediti: a) module ovih vektora; b) analitički izraz za skalarni proizvod ab.

Rešenje. a) Pošto je npr. $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, to je

$$a^2 = aa = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_1 a_2 (e_1 e_2) + 2\,a_1 a_3 (e_1 e_3) + 2\,a_2 a_3 (e_2 e_3).$$

Analogno je

$$b^2 = bb = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2\,b_1 b_2 (e_1 e_2) + 2\,b_1 b_3 (e_1 e_3) + 2\,b_2 b_3 (e_2 e_3).$$

b) Dalje je

$$ab = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)\cdot(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3),$$

tj.

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)(e_1 e_2)$$
$$+ (a_1 b_3 + a_3 b_1)(e_1 e_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)(e_2 e_3).$$

Za $b = a$ se iz poslednje relacije dobijaju napred nađene relacije za a^2 i b^2.

Za $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = k$, iz prednjih rezultata se dobijaju već nađene analitičke relacije za ab, odnosno a^2.

ZADATAK 3. Vektorskom metodom odrediti dužine težišnih linija u trouglu kao funkcije njihovih strana.

Rešenje. Neka su $\overrightarrow{BA} = c$, $\overrightarrow{CB} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$ vektori trouglovih strana a $m_c = \overrightarrow{CC'}$ vektor težišne linije CC'. Produžimo ovu za dužinu $C'C'' = CC'$, tada je $AC''BC$ paralelogram iz koga proizilazi $\overrightarrow{CC''} = 2\,m_c$.

S druge strane $\overrightarrow{CC''}$ predstavlja zbir vektora a i b, tj.

$$\overrightarrow{CC''} = a + b, \text{ te je } 2\,m_c = a + b, \quad m_c = (a+b)/2.$$

Odavde je

$$m_c\, m_c = m_c^2 = (a+b)^2/4 = (a^2 + 2ab + b^2)/4.$$

Analogni obrasci se dobijaju i za ostale dve težišne linije.

ZADATAK 4. Izvesti obrazac za kosinus zbira dva ugla (adiciona teorema za funkciju kosinus).

Rešenje. Ako jedinični vektori a_0 i b_0 imaju početak u koordinatnom početku O, leže u ravni XOY i zaklapaju sa osom OX respektivno uglove α i $-\beta$, tada je

(1) $$a_0 b_0 = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

gde je $a_0 = (a_1, a_2)$, $b_0 = (b_1, b_2)$. Kako je:

$$a_1 = \cos\alpha, \quad a_2 = \sin\alpha; \quad b_1 = \cos\beta, \quad b_2 = -\sin\beta, \quad a_0 b_0 = \cos\sphericalangle(a_0, b_0) = \cos(\alpha+\beta),$$

jednakost (1) postaje

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

ZADATAK 5. Dokazati da se visine u trouglu seku u jednoj tački.

Rešenje. Neka je O tačka preseka visina spuštenih iz temena A i B i neka je

$$\overrightarrow{OA} = x, \quad \overrightarrow{OB} = y, \quad \overrightarrow{OC} = z, \quad \overrightarrow{AB} = c, \quad \overrightarrow{BC} = a, \quad \overrightarrow{CA} = b.$$

Tada je

$$a = z - y, \quad b = x - z, \quad c = y - x.$$

Nosači vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ poklapaju se sa visinama iz temena A odnosno B, te je, zbog upravnosti vektora $\overrightarrow{OA} = x$ i a odnosno $\overrightarrow{OB} = y$ i b,

$$xa = 0, \quad \text{tj.} \quad (x, z-y) = xz - xy = 0;$$
$$yb = 0, \quad \text{tj.} \quad (y, x-z) = yx - yz = 0.$$

Sabiranjem poslednjih dveju relacija dobija se

$$xz - yz = 0, \quad \text{tj.} \quad (x-y, z) = 0,$$

ili kako je $y - x = c$, to iz poslednje relacije proizilazi $-(cz) = 0$, tj. $z \perp c$, što znači da je OC upravno na AB tako da tačka O leži i na visini povučenoj iz trećeg temena C na stranu AB.

ZADATAK 6. Dokazati da je paralelogram $ABCD$, u kome su dijagonale AC i BD uzajamno upravne, romb.

Rešenje. Kako su vektori dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$ po uslovu zadatka upravni, to je $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$. Međutim je

$$\overrightarrow{AC} = a + b, \quad \overrightarrow{DB} = a - b,$$

tj.

$$(a+b)\cdot(a-b) = 0, \quad \text{ili} \quad a^2 - ab + ba - b^2 = 0,$$

odakle je

$$a^2 - b^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad a = b,$$

a to znači da je paralelogram $ABCD$ romb.

ZADATAK 7. Vektorskom metodom izvesti obrazac sferne trigonometrije

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

(a, b, c strane sfernog trougla, C ugao suprotan strani c).

Rešenje. Sferni trougao ABC možemo ne smanjujući opštost zaključaka, posmatrati na sferi poluprečnika jednakog jedinici (sl. 1.10.2). Tada će vektori položaja $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ trouglovih temena s obzirom na centar sfere biti jedinični vektori. Stoga je pre svega

$$\cos c = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Rastavimo vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ na dve komponente i to: jednu u pravcu jediničnog vektora $\overrightarrow{OC}$, a drugu upravnu na ovaj pravac. Tada će prema oznakama na slici 1.10.2 biti

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A} = OA_1\cdot\overrightarrow{OC} + A_1A\cdot e_1, \quad (e_1 = \text{ort}\,\overrightarrow{A_1A}),$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B} = OB_1\cdot\overrightarrow{OC_1} + B_1B\cdot e_2, \quad (e_2 = \text{ort}\,\overrightarrow{B_1B}).$$

Međutim, kako je $OA_1 = \cos b$; $A_1A = \sin b$, $OB_1 = \cos a$, $B_1B = \sin a$, imamo

$$\overrightarrow{OA_1} = \cos b\cdot\overrightarrow{OC} + \sin b\cdot e_1;$$

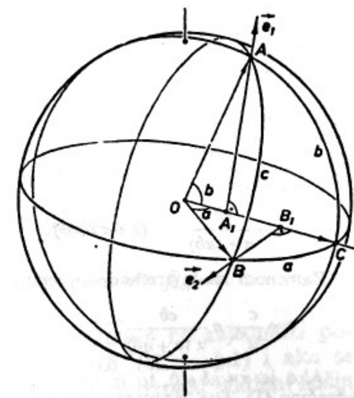
$$\overrightarrow{OB} = \cos a\cdot\overrightarrow{OC} + \sin a\cdot e_2.$$

Zato jednakost za $\cos c$ daje:

$$\cos c = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\cos b\cdot\overrightarrow{OC} +$$
$$+ \sin b\cdot e_1)(\cos a\cdot\overrightarrow{OC} + \sin a\cdot e_2),$$

te primenom distributivnog zakona nalazimo

$$\cos c = \cos a\cos b\,(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC})$$
$$+ \cos a \sin b\,(e_1, \overrightarrow{OC})$$
$$+ \sin a \cos b\,(\overrightarrow{OC}, e_2)$$
$$+ \sin a \sin b\,(e_1, e_2)$$



Sl. 1.10.2.

Kako je $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC}) = 1$, $(\overrightarrow{OC}, e_1) = (\overrightarrow{OC}, e_2) = 0$, $e_1 e_2 = \cos C$, to prethodna jednakost postaje

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Analogno se dobijaju i odgovarajuća dva obrasca:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \qquad \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

Zadatak 8. Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ vektori strana jednog paralelograma, dokazati da postoje relacije:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2), \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 4(\boldsymbol{ab})$$

i dati njihovu geometrijsku interpretaciju.

Rešenje. Vektori $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ predstavljaju vektore dijagonala paralelograma čiji su vektori strana $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Sabiranjem identiteta

$$(1) \qquad \begin{aligned} (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = d_1{}^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2(\boldsymbol{ab}) + \boldsymbol{b}^2, \\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = d_2{}^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2(\boldsymbol{ab}) + \boldsymbol{b}^2, \end{aligned}$$

nalazi se

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2),$$

tj. zbir kvadrata dijagonala jednak je dvostrukom zbiru kvadrata njegovih strana.

Oduzimanjem drugog od identiteta (1) od prvog, dobijamo:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 4(\boldsymbol{ab}) \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{ab} = (d_1{}^2 - d_2{}^2)/4,$$

tj. skalarni proizvod vektora strana jednak je četvrtini razlike kvadrata njegovih dijagonala.

Ako je $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tada se dobija $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$, te je

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2, \qquad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2.$$

Odavde je dalje

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 4(\boldsymbol{ab}) = 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),$$

odakle proizilazi analitički izraz za skalarni proizvod dva vektora:

$$\boldsymbol{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Zadatak 9. Rešiti po $\boldsymbol{x}$ vektorsku jednačinu

$$(1) \qquad \alpha \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{xb}) = \boldsymbol{c} \qquad (\alpha \neq 0),$$

gde su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dati vektori, a α dati skalar.

Rešenje. Ako pomnožimo jednačinu (1) skalarno vektorom $\boldsymbol{b}$, dobijamo

$$(2) \qquad \alpha(\boldsymbol{xb}) + (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{xb}) = \boldsymbol{cb}.$$

Odavde je

$$\boldsymbol{xb} = \frac{\boldsymbol{cb}}{\alpha + (\boldsymbol{ab})} \qquad (\alpha + \boldsymbol{ab} \neq 0).$$

Zamenom $\boldsymbol{xb}$ iz prethodne u jednačinu (1) dobijamo njeno jednoznačno rešenje u obliku

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{c}}{\alpha} - \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{cb}}{\alpha(\alpha + \boldsymbol{ab})}.$$

Ako je $\alpha + \boldsymbol{ab} = 0$, to iz (2) proizilazi da mora biti $\boldsymbol{cb} = 0$, pa ukoliko egzistira rešenje $\boldsymbol{x}$ jednačine (1), ono mora biti linearna funkcija od $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{c}$ oblika

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c}.$$

Zamenom u (1) dobijamo

$$-(\boldsymbol{ab})(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}[(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{c}; \quad \text{tj.} \quad -(\boldsymbol{ab})(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c}) + \lambda \boldsymbol{a}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{c}$$

odakle nalazimo

$$\mu = -\frac{1}{\boldsymbol{ab}} \qquad (\boldsymbol{ab} \neq 0).$$

Rešenje će u ovom slučaju imati oblik

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}/\boldsymbol{ab},$$

gde je λ proizvoljni skalarni parametar i neće biti jedinstveno.

Najzad, ako je $\boldsymbol{ab} = 0$, to mora biti i $\boldsymbol{c} = 0$, pa se jednačina (1) redukuje na

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{xb}) = 0,$$

a nju zadovoljava svaki vektor $\boldsymbol{x}$ upravan na vektoru $\boldsymbol{b}$.

1.11. VEKTORSKI PROIZVOD DVA VEKTORA

Posmatrajmo jednu ravnu figuru ograničenu zatvorenom krivom (konturom). Veličina površine ove figure izražena je jednim brojem (skalarom). No s obzirom na činjenicu da ravan ove figure ima određeni položaj u prostoru, to površina figure može biti predstavljena i jednim vektorom. Pri tome predstavljanju nema značaja oblik figure, već samo skalarna vrednost njene površine i položaj ravni u kojoj leži ova figura.

Da bismo definisali vektor površine jedne ravne figure, potrebno je najpre dati definiciju orijentacije ravni u kojoj leži ova figura.

Definicija 1. *Ravna površina se naziva orijentisanom ako je utvrđen pozitivan smer obilaženja jedne zatvorene krive linije (konture) koja leži u ovoj ravni.*

U matematičkoj analizi daje se šira definicija pojma orijentisane površine. U ovoj je sadržana i napred data koja je dovoljna za primenu u vektorskoj algebri.

Ako se za pozitivan smer obilaženja konture usvoji smer suprotan kretanju skazaljke na časovniku, tada će biti *pozitivno orijentisana* ona strana ravne površine za koju će smer obilaženja konture, posmatran s kraja jednog vektora koji je upravan na ravani, biti pozitivan, tj. sledovati u smeru suprotnom kretanju skazaljke na časovniku. Druga strana ravni će, pri ovako odabranom pozitivnom smeru, biti *negativno orijentisana*.

Na osnovu napred izloženog može se vektor površine jedne zatvorene ravne figure definisati ovako:

Definicija 2. *Vektorom površine jedne zatvorene ravne figure naziva se vektor čiji je:*

1° *modul brojno jednak veličini površine ove figure;*
2° *nosač upravan na ravni figure i*
3° *smer odgovara pozitivno orijentisanoj strani ravni ove figure.*

Ako dovedemo nekolinearne vektore $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ na zajednički početak O, nad njima konstruišemo paralelogram $OADB$ (sl. 1.11.1) i ako se ravan ovog paralelograma orijentiše, može se definisati na napred izloženi način vektor površine ovog paralelograma.

Definicija 3. *Vektorskim proizvodom vektora* a *i* b *naziva se vektor površine paralelograma konstruisanog nad tim vektorima.*

Ova definicija je identična sa sledećom koja se može ovako formulisati:

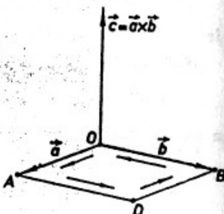
Definicija 4. *Vektorskim proizvodom vektora* a *i* b *naziva se vektor* c *koji ima:*

1° *modul jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima* a *i* b;

2° *za nosač pravu upravnu na ravni ovog paralelograma;*

3° *smer koji odgovara pozitivno orijentisanoj strani ove ravni, tj. smer mu je takav, da s njegovog kraja posmatrana rotacija vektora* a *prema vektoru* b *sleduje u smeru suprotnom smeru kretanja skazaljke na časovniku.*

Najzad, na osnovu prednjeg, vektorski proizvod dva vektora može se definisati i na ovaj način:



Sl. 1.11.1.

Definicija 5. *Vektorskim proizvodom vektora* a *i* b *naziva se vektor:*

1° *čiji je modul jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima* a *i* b;

2° *njegov nosač je upravan na ravni ovoga paralelograma;*

3° *vektori* a *i* b *i njihov vektorski proizvod* c *obrazuju trijedar vektora desne orijentacije.*

Vektorski proizvod vektora a i b označava se na jedan od sledećih načina:

$$a \times b, \quad [ab], \quad a \wedge b.$$

Od ovih oznaka mi ćemo upotrebljavati prvu.

Modul vektorskog proizvoda $c = a \times b$, po definiciji, jednak je površini paralelograma konstruisanog nad vektorima a i b, tj.

$$c = |a \times b| = ab \sin \sphericalangle (a, b).$$

Ako je $c_0 = \text{ort}\, c$, tada je

$$c = a \times b = ab \sin \sphericalangle (a, b) \cdot c_0.$$

Vektorski proizvod ima sledeće osobine:

1° Ako je $a \perp b$, tada imamo $\sin \sphericalangle (a, b) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, te je

$$\max |a \times b| = ab,$$

tj. modul vektorskog proizvoda ima najveću vrednost — jednaku proizvodu modula činilaca, ako su vektori-činioci među sobom upravni.

2° Vektorski proizvod dva vektora će predstavljati nula-vektor, ako je njegov modul jednak nuli, tj.

$$ab \sin \sphericalangle (a, b) = 0,$$

drugim rečima ako je: a) $a = 0$, $b \neq 0$ ili $a \neq 0$, $b = 0$; b) $a = 0$, $b = 0$; c) $\sin \sphericalangle (a, b) = 0$.

To znači da je $a \times b = 0$ bilo da je jedan od činilaca ili oba nula-vektori, ili da je $a \neq 0$, $b \neq 0$, no $\sin \sphericalangle (a, b) = 0$, tj. da su vektori *kolinearni*. Prema tome, vektorska jednakost

$$a \times b = 0,$$

pod uslovom da a i b ne predstavljaju nula-vektore, predstavlja *uslov kolinearnosti* ovih vektora. Na osnovu ovoga i napred rečenog uslov kolinearnosti dva vektora a i b može se izraziti na bilo koji od sledećih načina:

$$b = \lambda a, \quad \alpha a + \beta b = 0, \quad a \times b = 0.$$

U specijalnom slučaju svaki vektor a je kolinearan sa a, te je

$$a \times a = 0.$$

3° Na osnovu definicije vektorskog proizvoda $c = a \times b$ proizilazi da se on neće promeniti ako se kraj jednog od činilaca $\overrightarrow{OB} = b$, tj. B, pomeri duž prave koja je paralelna drugom činiocu $\overrightarrow{OA} = a$ (sl. 1.11.2). Pri tome su površine paralelograma $OACB$ i $OAC'B'$ jednake, a neće se promeniti ni pravac ni smer vektorskog proizvoda, te je

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB'}.$$

Ili može se premestiti početak O vektora $\overrightarrow{OB} = b$ u tačku O' na nosaču vektora $\overrightarrow{OA} = a$, ostavljajući kraj vektora u B. Kako je $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OB'}$, gde B' leži na pravoj paralelnoj nosaču vektora $\overrightarrow{OA}$, to je

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}.$$

Sa slike 1.11.2 sleduje $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}$, te je

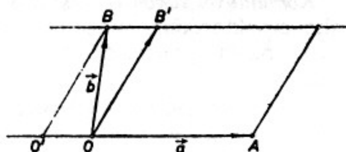
$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} \times (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{OA} \times (\overrightarrow{OB} + \lambda a) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB},$$

a to znači da se vektorski proizvod dva vektora ne menja ako se jednom činiocu doda vektor kolinearan sa drugim činiocem.

4° Ako se želi da se ispita mogućnost jednoznačnog određivanja nepoznatog činioca x iz vektorske jednačine

$$x \times a = b$$

iz poznatih vrednosti proizvoda b i drugog činioca a, tada se na osnovu osobine 3° zaključuje da gornjom jednačinom nije jednoznačno određen taj vektor, već da geometrijsko mesto njegovih krajeva predstavlja pravu liniju paralelnu vektoru a na rastojanju $\frac{b}{a}$ od pola.



Sl. 1.11.2.

Mehanička interpretacija vektorskog proizvoda dva vektora može se dati na pojmu momenta sile.

Momentom sile F sa napadnom tačkom u tački A s obzirom na pol O naziva se vektorski proizvod vektora položaja r napadne tačke i sile F, tj. $M = r \times F$.

Njegov modul je po definiciji

$$|M| = |r \times F| = rF \sin \sphericalangle (r, F) = Fd,$$

tj. modul momenta sile je jednak proizvodu skalarne veličine sile i rastojanja njenog nosača (kraka sile) od pola.

Uopšte vektorski proizvod $c = a \times b$ može se interpretirati kao moment vektora b sa napadnom tačkom u krajnjoj tački vektora a oko utvrđenog pola u početnoj tački ovog poslednjeg vektora.

ZADATAK 1. Odrediti brzinu tačke krutog tela koje rotira oko ose sa uglovnom brzinom ω.

Rešenje. Proizvoljna tačka M krutog tela opisaće pri rotaciji krug čija je ravan upravna na osi rotacije i čiji je centar na ovoj osi.

Za vreme Δt poluprečnik CM se obrne za ugao $CM \cdot \Delta\Theta$, te je brzina tačke

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CM \cdot \Delta\Theta}{\Delta t} = CM \cdot \omega$$

a njen nosač je upravan na CM. Veličina

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt}$$

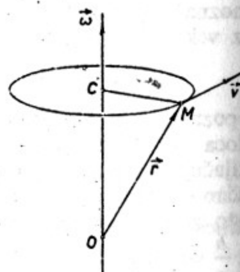
naziva se uglovnom brzinom rotacije.

Ako u O (sl. 1.11.3) prenesemo početak vektora $\vec{\omega}$ sa nosačem koji se poklapa sa osom rotacije, modulom ω i smerom takvim da sa njegovog kraja posmatrana rotacija sleduje u smislu suprotnom kretanju skazaljke na časovniku, tada se vektor $\vec{\omega}$ naziva *vektorom uglovne brzine*. Ako je r vektor položaja tačke M s obzirom na pol O na osi rotacije, tada vektorski proizvod $\vec{\omega} \times r$ ima za modul

$$|\vec{\omega} \times r| = |\vec{\omega}|\, r \sin\sphericalangle(\vec{\omega}, r) = v;$$

za nosač ima pravu upravnu na ravan vektora $\vec{\omega}$ i r, a smer takav da vektori $\vec{\omega}$, r i $\vec{\omega} \times r$ obrazuju desni trijedar. To znači da se pravac i smer vektora $\vec{\omega} \times r$ poklapa sa pravcem i smerom vektora v, te je $v = \vec{\omega} \times r$.

Komutativni zakon za vektorsko množenje ne važi, tj. ako u vektorskom proizvodu dva vektora činioca promene mesta, promeniće se i znak vektorskog proizvoda.



Sl. 1.11.3.

Zaista, po definiciji vektorskog proizvoda vektori $c = a \times b$ i $c_1 = b \times a$ imaju iste module i pravce, no suprotne smerove, pa je $c = -c_1$, tj.

$$a \times b = -(b \times a).$$

Za vektorski proizvod dva vektora važi *asocijativni zakon* u odnosu na skalarni činilac, tj.

$$ma \times b = m(a \times b), \text{ ili } ma \times nb = mn(a \times b),$$

što se može dokazati na analogni način onome kod skalarnog proizvoda.

Distributivni zakon za vektorsko množenje važi, tj.

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

a) Neka je p proizvoljan vektor koji leži u ravni E, a c_0 jedinični vektor upravan na ovoj ravni. Vektorski proizvod $p \times c_0$ ima modul

$$|p \times c_0| = pc_0 \sin\sphericalangle(p, c_0) = p,$$

pošto je

$$c_0 = 1, \quad \sin\sphericalangle(p, c_0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Pravac vektora $p \times c_0$ je upravan na ravni vektora p i c_0, tj. nosač ovog vektora leži u ravni E. Najzad smer ovog vektorskog proizvoda je takav, da vektori p, c_0 i $p \times c_0$ obrazuju trijedar desne orijentacije. To znači da je operacija vektorskog množenja jednog vektora p koji leži u ravni E jediničnim vektorom c_0 upravnim na tu ravan ekvivalentna rotaciji vektora p u ravni E za ugao $\frac{\pi}{2}$ u negativnom smeru.

b) Ako je c_0 jedinični vektor upravan na ravni vektora a i b, tada distributivni zakon važi, tj.

$$(a + b) \times c_0 = a \times c_0 + b \times c_0.$$

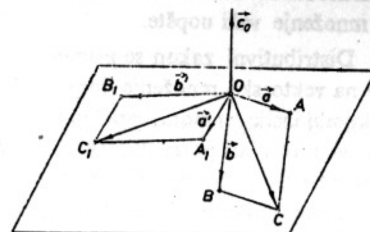
Neka je $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = a + b$ i c_0 jedinični vektor upravan na ravni a, b i $a + b$, (sl. 1.11.4), tada je prema onome što je konstatovano pod a):

$$\overrightarrow{OA} \times c_0 = a \times c_0 = \overrightarrow{OA_1} \qquad (\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA}),$$

$$\overrightarrow{OB} \times c_0 = b \times c_0 = \overrightarrow{OB_1} \qquad (\overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{OC} \times c_0 = (a + b) \times c_0 = \overrightarrow{OC_1} \qquad (\overrightarrow{OC_1} \perp \overrightarrow{OC}),$$

tj. paralelogram $OACB$ je prešao, posle operacije vektorskog množenja sa c_0, u položaj $OA_1C_1B_1$ izveden iz prvobitnog rotacijom za ugao $\frac{\pi}{2}$ u negativom smeru.



Sl. 1.11.4.

Međutim, iz paralelograma $OA_1C_1B_1$ proizilazi $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, tj. prema prethodnim relacijama

$$(a + b) \times c_0 = a \times c_0 + b \times c_0,$$

što je trebalo dokazati.

Ako je c proizvoljan vektor upravan na ravni vektora a i b, tada, množeći poslednju relaciju sa $c = |c|$, budući da je $c_0 = \text{ort}\, c$, dobijamo

$$(a + b) \times c \cdot c_0 = a \times c \cdot c_0 + b \times c \cdot c_0,$$

tj.

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

To znači da distributivni zakon važi ako je vektor c upravan na ravni vektora a i b.

c) Posmatrajmo opšti slučaj, kad su $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = c$ proizvoljni vektori i konstruišimo nad vektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ paralelogram $OADE$ (sl. 1.11.5). Tada je pre svega

$$\overrightarrow{OD} = a + b.$$

Kroz tačku O povucimo ravan E upravnu na vektoru $\boldsymbol{c}$ i neka su projekcije tačaka A, D, B na ovu ravan respektivno A_1, D_1, B_1. Tada je $OA_1D_1B_1$ takođe paralelogram iz koga proizilazi:

$$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}.$$

Pošto je vektor $\boldsymbol{c}$ upravan na ravni E ovoga paralelograma, to je

$$\overrightarrow{OD_1}\times\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA_1}\times\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OB_1}\times\boldsymbol{c}.$$

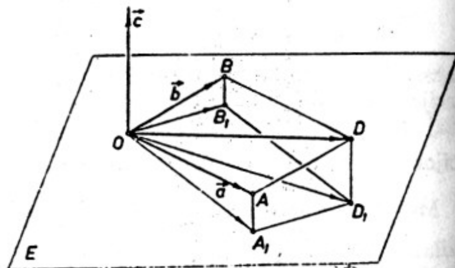
Duži AA_1, BB_1, CC_1 su upravne na ravni E, pa su prema tome paralelne vektoru $\boldsymbol{c}$. S druge strane, iz osobine da se vektorski proizvod dva vektora ne menja ako se krajnja tačka jednoga od njih pomera po pravoj paralelnoj drugom vektoru, proizilazi da se $\overrightarrow{OD_1}\times\boldsymbol{c}$ neće promeniti, ako tačku D_1 premestimo u D duž $D_1D\parallel\boldsymbol{c}$. Isto tako neće se promeniti $\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{c}$ ako se A_1 premesti u A, kao ni $\overrightarrow{OB_1}\times\boldsymbol{c}$, ako se B_1 premesti u B. Na osnovu toga prethodna jednakost može se pisati u obliku:

$$\overrightarrow{OD}\times\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OB}\times\boldsymbol{c}$$

ili kako je $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, dobijamo

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

tj. distributivni zakon za vektorsko množenje važi uopšte.



Sl. 1.11.5.

Distributivni zakon se primenjuje na vektorsko množenje linearnih kombinacija vektora, pri čemu se ne sme menjati poredak činilaca pri množenju s obzirom na to da za vektorsko množenje dva vektora ne važi komutativni zakon.

Primer 1. Vektorski proizvod linearnih kombinacija $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ je

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=-2\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

odakle sleduje

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

Geometrijski interpretirano, ovo znači da je površina paralelograma konstruisanog nad dijagonalama jednog paralolograma sa vektorima strana $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ jednaka dvostrukoj površini ovog paralelograma.

Za dobijanje analitičkog izraza za vektorski proizvod dva vektora potrebno je najpre odrediti vektorske proizvode jediničnih vektora $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ osa Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. S obzirom na to da je trijedar ovih vektora desni i da su po dva od njih uzajamno upravni, a na osnovu definicije vektorskog proizvoda, nalazi se

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0. \end{array}$$

Ako su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zadati svojim projekcijama $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, tada je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &=a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\ &\quad+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}). \end{aligned}$$

Koristeći napred nađene vrednosti za vektorske proizvode jediničnih vektora $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i grupišući sabirke sa istim jediničnim vektorima, dobija se

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\,\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{k}.$$

Ova relacija predstavlja analitički izraz za vektorski proizvod $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, odakle se za projekcije ovog proizvoda na ose Dekartovog pravouglog sistema dobija:

$$c_1=a_2b_3-a_3b_2,\quad c_2=a_3b_1-a_1b_3,\quad c_3=a_1b_2-a_2b_1.$$

Ove projekcije nisu ništa drugo do determinante matrice od projekcija vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|$$

Nađeni analitički izraz se može napisati i u obliku simboličke determinante trećeg reda:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

čiju prvu vrstu čine jedinični vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ a drugu i treću — projekcije vektora $\boldsymbol{a}$ odnosno $\boldsymbol{b}$. Razvijanjem ove determinante po elementima prve vrste dolazi se neposredno do analitičkog izraza za vektorski proizvod.

Zadatak 2. Izvesti vektorskim putem sinusno pravilo ravne trigonometrije.

Rešenje. Ako je $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, tada je $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

Vektorskim množenjem ove relacije vektorom $\boldsymbol{a}$ sleva dobijamo

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\quad \text{tj.}\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\quad \text{odakle je}\quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|,$$

ili

$$ab\sin C=ac\sin B,\quad \text{tj.}\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Analogno se dokazuje da je $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, te odavde proizilazi

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Zadatak 3. Dokazati Lagrangeov identitet:

$$\begin{aligned} &(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\\ &=(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2. \end{aligned}$$

Rešenje. Kako je uopšte:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = a^2 b^2 \sin^2 \measuredangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}); \quad (\boldsymbol{ab})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \measuredangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

to je

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = a^2 b^2. \tag{1}$$

Ako je $\boldsymbol{a} = (l_1, m_1, n_1)$, $\boldsymbol{b} = (l_2, m_2, n_2)$, tada je

$$a^2 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2, \quad b^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2;$$

$$(\boldsymbol{ab})^2 = (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2; \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2,$$

pa se zamenom u (1) dobija LAGRANGEOV identitet u analitičkoj formi, dok jednakost (1) predstavlja taj identitet u vektorskom obliku.

ZADATAK 4. Naći vektorsku jednačinu kružnog cilindra poluprečnika ρ čija osa prolazi kroz koordinatni početak O, a jedinični vektor ose je $\boldsymbol{e}$.

Rešenje. Ako se sa $\boldsymbol{r}$ označi vektor položaja proizvoljne tačke na ovome cilindru, tada vektorski proizvod $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}$ ima modul

$$|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}| = 1 \cdot r \cdot \sin \measuredangle (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}) = \rho.$$

Odavde je $|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}|^2 = (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r})^2$, te je tražena vektorska jednačina cilindrične površine:

$$(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r})^2 = \rho^2.$$

Odabere li se DEKARTOV pravougli sistem tako da mu se osa OZ poklopi sa osom cilindra, a smer ove tako da je $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}$, tada je jednačina površine: $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r})^2 = \rho^2$.

Kako je

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y \cdot \boldsymbol{i} + x \cdot \boldsymbol{j},$$

to analitički izraz površine cilindra ima oblik: $x^2 + y^2 = \rho^2$.

ZADATAK 5. Temena trougla određena su prema polu O vektorima $A = (\boldsymbol{r}_1)$, $B = (\boldsymbol{r}_2)$, $C = (\boldsymbol{r}_3)$. Odrediti vektor površine trougla ABC.

Rešenje. Ako je $\boldsymbol{S}$ vektor površine trougla, tada je

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}).$$

Međutim je

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2,$$

pa je

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} ((\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)).$$

Odavde se posle izvršenog vektorskog množenja i svih uprošćenja dobija

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1).$$

Čitalac može samostalno: a) da ispita pri kakvom rasporedu temena A, B, C je vektor $\boldsymbol{S} = 0$; b) da napiše projekcije vektora $\boldsymbol{S}$, ako je $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ i nađe $|\boldsymbol{S}|$.

ZADATAK 6. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v}$, gde su $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ uzajamno upravni jedinični vektori.

Rešenje. Površina paralelograma je

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \quad (S = |\boldsymbol{S}|),$$

gde je

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v}).$$

Dalje je

$$\boldsymbol{S} = 2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}) - 8(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + 3(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) - 12(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{S} = 11(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}).$$

Odavde je

$$S = |\boldsymbol{S}| = 11 \cdot |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}| = 11 \cdot 1 \cdot 1 \sin \frac{\pi}{2} = 11.$$

ZADATAK 7. Ispitati da li je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, ako su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ tri proizvoljna vektora koji ispunjavaju uslov $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$.

Rešenje. Iz uslova $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$ proizilazi $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, te je

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.$$

Analogno se dokazuje ispravnost vektorske jednakosti $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

Ako su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ vektori strana trougla: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, čitalac može geometrijskim putem da pokaže egzistenciju dvostruke vektorske relacije $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

1.12. PROIZVOD TRI VEKTORA

Posmatraćemo različite vrste proizvoda do kojih se može doći ako se množe tri vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$. Pri tome treba imati u vidu da rezultat množenja dva vektora može biti skalar (skalarni proizvod) ili vektor (vektorski proizvod) dva vektora.

1. Ako se pomnože skalarno dva vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, biće

$$\boldsymbol{ab} = m,$$

tj. proizvod m je skalar. Pomnožimo li ovaj skalar vektorom $\boldsymbol{c}$, dobijamo

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{c} = m\boldsymbol{c},$$

tj. vektor kolinearan sa vektorom $\boldsymbol{c}$.

Analogno proizvodi:

$$(\boldsymbol{bc}) \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{i} \quad (\boldsymbol{ca}) \cdot \boldsymbol{b}$$

su vektori kolinearni respektivno sa vektorom $\boldsymbol{a}$ odnosno $\boldsymbol{b}$.

Treba primetiti da kod ovog množenja igra bitnu ulogu poredak kojim se vrši množenje. Asocijativni zakon ovde ne važi. Međutim, distributivni zakon važi, te je ovde, na primer:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot (\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{a}_1 (\boldsymbol{bc}) + \boldsymbol{a}_2 (\boldsymbol{bc}).$$

2. Ako se pomnože vektorski dva vektora, npr. $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, tada je proizvod $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ vektor.

Množenje ovog poslednjeg vektora trećim vektorom $\boldsymbol{a}$ može se izvršiti tako da proizvod bude: a) skalar; b) vektor.

a) Proizvod $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ predstavlja skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{a}$ i vektorskog proizvoda vektora $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$. Ovaj proizvod je, prema tome, skalar i naziva se *mešovitim proizvodom* ili *skalarno-vektorskim proizvodom* vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$.

b) Proizvod $a \times (b \times c)$ predstavlja vektorski proizvod vektora a i vektorskog proizvoda vektora b i c. Ovaj proizvod je vektor i naziva se *dvostrukim vektorskim proizvodom tri vektora a, b, c.*

1.13. MEŠOVITI PROIZVOD TRI VEKTORA

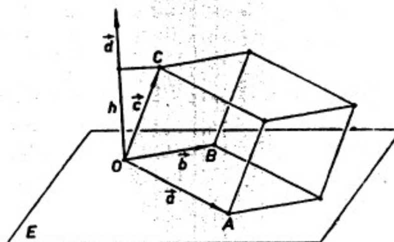
Pomnožimo li vektore a i b vektorski, pa dobijeni vektor $a \times b$ pomnožimo zatim skalarno trećim vektorom c, tada će proizvod $(a \times b) \cdot c$ predstavljati *mešoviti proizvod vektora a, b, c.*

Stavimo kratkoće radi $a \times b = d$, tada je

$$(a \times b) \cdot c = dc.$$

Proučićemo posebno sledeća dva slučaja.

1. Vektori a, b, c obrazuju trijedar desne orijentacije. Konstruišimo nad ovim vektorima paralelepiped (sl. 1.13.1). Tada je



Sl. 1.13.1.

$$(a \times b) \cdot c = dc = d \cdot \text{proj}_d c.$$

Međutim $|d| = |a \times b|$ predstavlja površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima a i b, a koji je osnova paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b i c. Visina paralelepipeda, koja odgovara ovoj osnovi je

$$\text{proj}_d c = h.$$

Zato je

$$(a \times b) \cdot c = d \, \text{proj}_d c = dh = V,$$

tj. ako vektori a, b, c obrazuju trijedar desne orijentacije, tada mešoviti proizvod $(a \times b) \cdot c$ predstavlja zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad ovim vektorima kao ivicama.

2. Vektori a, b, c obrazuju trijedar leve orijentacije (sl. 1.13.2). U ovom slučaju vektori c i $d = a \times b$ leže u različitim oblastima koje odvaja ravan vektora a i b. Zato je u ovom slučaju visina paralelepipeda

$$h = \text{proj}_{-d} c = -\text{proj}_d c.$$

Zbog toga je u ovom slučaju

$$(a \times b) \cdot c = dc = d \, \text{proj}_d c = -dh = -V,$$

gde je V zapremina paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b, c.

Iz napred izloženog proizilazi zaključak: mešoviti proizvod po apsolutnoj vrednosti predstavlja zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b, c, tj.

$$|(a \times b) \cdot c| = V,$$

pri čemu je ovaj proizvod pozitivan ili negativan, prema tome da li vektori a, b, c obrazuju trijedar desne ili leve orijentacije.

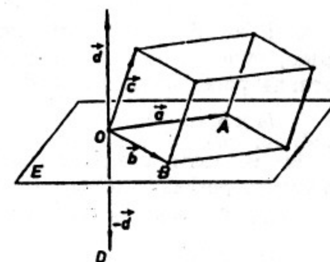
Ako su vektori a, b, c dati svojim projekcijama:

$$a = (a_1, a_2, a_3),$$

$$b = (b_1, b_2, b_3), \quad c = (c_1, c_2, c_3),$$

tada je pre svega

$$d = a \times b = (d_1, d_2, d_3)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3,$$
$$a_1 b_2 - a_2 b_1).$$



Sl. 1.13.2.

Zato je

(1) $$(a \times b) \cdot c = dc = d_1 c_1 + d_2 c_2 + d_3 c_3,$$

ili

$$(a \times b) \cdot c = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3.$$

Izraz na desnoj strani predstavlja razvijeni oblik determinante trećeg reda čiju prvu, drugu i treću vrstu čine respektivno projekcije vektora a, b, c, tj.

(2) $$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Jednakosti (1) ili (2) predstavljaju *analitički izraz* za *mešoviti proizvod* tri vektora.

Zapremina paralelepipeda nad vektorima a, b, c je

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

gde znak + odgovara slučaju kada vektori a, b, c obrazuju trijedar desne, a znak — slučaju kada ovi vektori obrazuju trijedar leve orijentacije.

Mešoviti proizvod ima sledeće osobine.

1. Kako trijedri a, b, c i b, c, a imaju istu orijentaciju, mešoviti proizvodi $(a \times b) \cdot c$ i $(b \times c) \cdot a$ imaju iste znake; po apsolutnoj vrednosti oni su jednaki, jer ova vrednost predstavlja zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b, c. Zato je

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a, \text{ ili } abc = bca.$$

Kako ciklička permutacija vektora ne menja orijentaciju trijedra ovih vektora, biće

$$abc = bca = cab.$$

Isto tako je

$$acb = bac = cba,$$

dok je

$$abc = bca = cab = -acb = -bac = -cba,$$

jer npr. trijedri a, b, c, i a, c, b imaju suprotnu orijentaciju.

Dakle, *cikličkim pomeranjem vektora u mešovitom proizvodu vrednost ovog proizvoda se ne menja.*

2. Mešoviti proizvod vektora može biti jednak nuli, na primer $(a\times b)\cdot c=0$, ako su: jedan, dva ili sva tri činioca nula-vektori, ili ako sva tri vektora leže u jednoj ravni, tj. ako su komplanarni. U slučaju komplanarnosti tri vektora, zapremina paralepipeda konstruisanog nad ovim vektorima je jednaka nuli, te je

$$(a\times b)\cdot c=0.$$

Prema tome, u slučaju kada nijedan od činilaca a, b, c ne predstavlja nula-vektor, poslednja relacija izražava *uslov komplanarnosti* ovih vektora.

Analitički izraz za ovaj uslov je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

U vektorskom obiku može se uslov komplanarnosti tri vektora a, b, c izraziti bilo kojom od relacija:

$$c=\lambda a+\mu b,\quad \alpha a+\beta b+\gamma c=0,\quad (a\times b)\cdot c=0.$$

3. Za mešoviti proizvod važi distributivni zakon; na primer:

$$(a\times(b_1+b_2))\cdot c=(a\times b_1)\cdot c+(a\times b_2)\cdot c.$$

ZADATAK 1. Dokazati da je mešoviti proizvod tri vektora, od kojih su dva kolinearna, jednak nuli.

Rešenje. U ovom slučaju je na primer $a\cdot(b\times\lambda a)=b\cdot(\lambda a\times a)=0$, jer je $\lambda a\times a=0$.

ZADATAK 2. Izračunati visinu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima:

$$a=3u+2v-5w,\quad b=u-v+4w,\quad c=u-3v+w,$$

ako je za osnovu uzet paralelogram konstruisan nad a i b (u, v, w su uzajamno upravni jedinični vektori).

Rešenje. Kako je $V=|(a\times b)\cdot c|$, a s druge strane $V=|(a\times b)|\cdot h$, to je

$$|a\times b|\cdot h=|(a\times b)\cdot c|,$$

odakle je

$$h=|(a\times b)\cdot c|/|a\times b|.$$

Dalje je

$$(a\times b)=\begin{vmatrix} u & v & w \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3u-17v-5w,\qquad |a\times b|=\sqrt{323},$$

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=49$$

pa je zato $h=49/\sqrt{323}$.

ZADATAK 3. Pokazati da je zapremina trostrane piramide $V=|(\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB})\cdot\overrightarrow{SC}|/6$, gde su $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ vektori sa zajedničkim početkom u vrhu piramide S.

Rešenje. Trostrana piramida $ABCS$ je 1/6 paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ kao nad ivicama. Zato je zapremina ove piramide jednaka

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB})\cdot\overrightarrow{SC}|.$$

1.14. DVOSTRUKI VEKTORSKI PROIZVOD

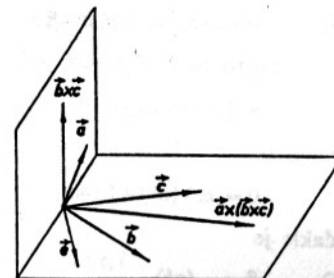
Dvostruki vektorski proizvod predstavlja vektorski proizvod vektora i vektorskog proizvoda druga dva vektora i označava se:

$$a\times(b\times c).$$

Za ovaj proizvod ne važi ni komutativni, ni asocijativni zakon množenja, tj. u opštem slučaju je

$$a\times(b\times c)\neq(b\times c)\times a,\quad a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c.$$

Kako je po definiciji vektorskog proizvoda vektor $a\times(b\times c)$ upravan na ravni vektora $b\times c$ i a, a vektori b i c upravni na vektoru $b\times c$, to odatle proizilazi da su vektori $a\times(b\times c)$, b i c upravni na istom vektoru $b\times c$, tj. ova tri vektora su komplanarna. Komplanarnost ovih vektora može se izraziti relacijom



Sl. 1.14.1.

(1) $$a\times(b\times c)=\alpha b+\beta c,$$

gde su α i β dva skalarna parametra koje treba odrediti. U ravni E vektora b i c uočimo jedinični vektor e sa strane vektora b tako da bude upravan na vektoru c; tada je

$$ce=0.$$

Skalarnim množenjem relacije (1) sa e, dobijamo

(2) $$[a\times(b\times c)]\cdot e=\alpha(be).$$

Prema osobini mešovitog proizvoda imamo da je

(3) $$(a\times(b\times c))\cdot e=a\cdot((b\times c)\times e).$$

Pravac i smer vektora $(b\times c)\times e$ poklapa se sa ovim elementima vektora c, a njegov modul je jednak

$$|(b\times c)\times e|=|b\times c|\sin\sphericalangle((b\times c),\ e)=|b\times c|=bc\sin\sphericalangle(b,\ c),$$

jer je $\sphericalangle((b\times c),\ e)=\frac{\pi}{2}$.

Zato je

$$(b\times c)\times e=bc\sin\sphericalangle(b,\ c)\cdot \text{ort}\ c=bc\sin\sphericalangle(b,\ c)\cdot\frac{\vec{c}}{c}=b\sin\sphericalangle(b,\ c)\cdot\vec{c}.$$

Sa slike je međutim $\sphericalangle(b,\ c)=\frac{\pi}{2}-\sphericalangle(e,\ b)$, tj. $\sin\sphericalangle(b,\ c)=\cos\sphericalangle(\vec{e},\ b)$, pa je

$$(b\times c)\times e=b\cos\sphericalangle(e,\ b)\,c=(be)\cdot c.$$

Zamenom u (3) dobijamo:

$$(a\times(b\times c))\cdot e=a\cdot((b\times c)\times e)=(ac)\cdot(be),$$

te (2) daje

$$(\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{b}\mathbf{e}),$$

odakle se dobija vrednost parametra α:

$$\alpha = \mathbf{a}\mathbf{c}. \tag{4}$$

Jednakost (1), prema (4), dobija oblik:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c})\,\mathbf{b} + \beta\,\mathbf{c}. \tag{5}$$

Skalarnim množenjem jednakosti (5) vektorom $\mathbf{a}$ i uzimajući u obzir da je

$$\mathbf{a}\cdot\big(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big) = 0,$$

dobija se

$$0 = (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{b}) + \beta(\mathbf{a}\mathbf{c}),$$

odakle je

$$\beta = -(\mathbf{a}\mathbf{b}). \tag{6}$$

Zamenom parametara α i β iz (4) i (6) u (1) dobija se za dvostruki vektorski proizvod izraz:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \tag{7}$$

koji se piše u obliku simboličke determinante drugog reda

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a}\mathbf{b} & \mathbf{a}\mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Prema (7) izvode se i sledeće dve jednakosti:

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}), \quad \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a}). \tag{8}$$

Sabiranjem jednakosti (7) i (8) dobija se:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0,$$

kojom je izražena činjenica da su vektori

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}), \quad \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}), \quad \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

komplanarni.

Neke slučajeve proizvoda u kojima se javlja više od tri vektora razmotrićemo u sledećim zadacima.

ZADATAK 1. Napisati izraz za skalarni proizvod dva vektorska proizvoda.

Rešenje. Ovaj proizvod ima oblik: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$. Ako stavimo $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{e}$, tada je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{e}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{d}\times\mathbf{e}) = \mathbf{c}\cdot\big(\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big).$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}\cdot\big(\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big) = \mathbf{c}\cdot\big(\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{d})\big),$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d}).$$

Poslednji rezultat se može pisati u obliku determinante

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\mathbf{c} & \mathbf{a}\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\mathbf{c} & \mathbf{b}\mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

U specijalnom slučaju za $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{b}$ dobija se LAGRANGEOV identitet

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a} & \mathbf{a}\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\mathbf{a} & \mathbf{b}\mathbf{b} \end{vmatrix} = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\alpha = a^2b^2\sin^2\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = S^2,$$

gde je S površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Poslednja determinanta predstavlja tzv. GRAMOVU determinantu drugog reda.

ZADATAK 2. Dokazati ispravnost vektorskog obrasca

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$$

preko projekcija činilaca: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Rešenje. Postupak je sledeći:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \ & (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1)\cdot\mathbf{i} && \| \ \pm a_1b_1c_1\,\mathbf{i} \\ & + (a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2)\cdot\mathbf{j} && \| \ \pm a_2b_2c_2\,\mathbf{j} \\ & + (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 + a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3)\cdot\mathbf{k} && \| \ \pm a_3b_3c_3\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

pri čemu su razvijenom obliku gornje determinante dodati i oduzeti vektori napisani desno od dvostruke vertikalne linije. Grupisanjem sabiraka na desnoj strani nalazi se:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \ & (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1\mathbf{i} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1\mathbf{i} \\ & + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_2\mathbf{j} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_2\mathbf{j} \\ & + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_3\mathbf{k} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

ili

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}).$$

Kako je $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \mathbf{a}\mathbf{c}$, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \mathbf{a}\mathbf{b}$, to prethodna jednakost dobija oblik:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}).$$

ZADATAK 3. Izračunati: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$.

Rešenje. Ovaj vektor leži u ravni vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (jer je upravan na vektoru $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$), a isto tako leži u ravni vektora $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$. Zato on ima za nosač liniju preseka ravni vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ sa ravni vektora $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$.

Stavimo $\mathbf{c}\times\mathbf{d} = \mathbf{e}$, tada je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{e} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{e}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{e}) = \mathbf{b}\big(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big) - \mathbf{a}\big(\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big).$$

Proizvod na levoj strani razložen je u komponente duž vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. On se može razložiti i duž vektora $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = -\big((\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big) = -\mathbf{d}\big(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big) + \mathbf{c}\big(\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big).$$

Izjednačujući izraze na desnim stranama poslednje dve relacije dobija se ova veza između vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{a}\big(\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big) + \mathbf{b}\big(\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big) + \mathbf{c}\big(\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\big) - \mathbf{d}\big(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big) = 0.$$

Ako $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nisu komplanarni, tj. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq 0$, dobija se izraz za razlaganje vektora $\mathbf{d}$ duž tri nekomplanarna vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ u obliku:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{d}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \mathbf{b}\frac{\mathbf{d}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \mathbf{c}\frac{\mathbf{d}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}.$$

U specijalnom slučaju za $d=a$ izraz $(a\times b)\times(c\times d)$ svodi se na

$$(a\times b)\times(a\times c)=a\,(a\cdot(b\times c)),$$

tj. proizvod vektora na levoj strani kolinearan je sa vektorom a.

ZADATAK 4. Koristeći izraz za skalarni proizvod dva vektorska proizvoda iz zadatka 1, izvesti osnovni obrazac sferne trigonometrije:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

Rešenje. Ako se u izrazu za

$$(a\times b)\cdot(c\times d)=(ac)\,(bd)-(ad)\,(bc)$$

stavi $d=a$, dobija se

$$(a\times b)\cdot(a\times c)=a^2\,(bc)-(ab)\,(ac).$$

Ako se na sferi jediničnog poluprečnika posmatra sferni trougao ABC i ako je $\overrightarrow{OA}=r_1$, $\overrightarrow{OB}=r_2$, $\overrightarrow{OC}=r_3$, to stavljajući u poslednji obrazac $a=r_1$, $b=r_2$, $c=r_3$ dobija se

$$(r_1\times r_2)\cdot(r_1\times r_3)=(r_2r_3)-(r_1r_2)\,(r_1r_3)\qquad(r_1^2=1).$$

Dalje je, pošto su r_i $(i=1, 2, 3)$ jedinični vektori,

$$r_1r_2=\cos c,\qquad r_2r_3=\cos a,\qquad r_3r_1=\cos b.$$

Vektor $r_1\times r_2$ ima modul jednak $\sin c$, i upravan je na ravni OAB, dok vektor $r_1\times r_3$ ima modul jednak $\sin b$, a upravan je na ravni AOB. Ugao, pak, između vektora $r_1\times r_2$ i $r_1\times r_3$ jednak je uglu između ravni AOB i AOC, tj.

$$\measuredangle\,((r_1\times r_2),\ (r_1\times r_3))=A.$$

Zato gornji izraz daje

$$(r_1\times r_2)\cdot(r_1\times r_3)=\sin b\sin c\cos A.$$

Prema tome je

$$\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c,$$

odakle je

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

ZADATAK 5. Ako je $a\perp b$ i $a\perp c$, dokazati da je $a\times(b\times c)=0$.

Rešenje. Kako je prema uslovu zadatka $ab=0$, $ac=0$, a sem toga

$$a\times(b\times c)=b\,(ac)-c\,(ab),$$

desna strana je na osnovu prethodnih relacija jednaka nuli, te je i $a\times(b\times c)=0$.

1.15. POLARNI I AKSIJALNI VEKTORI

Karakteristika vektora kao što su: linearna brzina ili ubrzanje materijalne tačke je ta da je smer ovih vektora uslovljen isključivo mehaničkom stranom pojave — smerom kretanja tačke. Međutim, vektor uglovne brzine rotacije zavisi od toga koji smer rotacije biramo za pozitivan odnosno zavisi od izbora koordinatnog sistema.

Vektori nezavisni od izbora trijedra osa određene orijentacije (linearna brzina, ubrzanje materijalne tačke) nazivaju se *polarnim vektorima*, dok vektori koji zavise od takvog izbora zovu se *aksijalnim vektorima* (vektor uglovne brzine rotacije).

To znači da pri prelazu sa sistema jedne orijentacije na sistem suprotne orijentacije polarni vektor ostaje nepromenjen, dok se kod aksijalnog vektora menja smer.

Ako su dva vektora a i b polarni, to iz definicije vektorskog proizvoda ovih vektora proizilazi da će taj proizvod biti aksijalni vektor. No, ako je jedan činilac aksijalni, a drugi polarni vektor, njihov vektorski proizvod je polarni vektor.

ZADATAK 1. Linearna brzina od rotacije je $v=\vec{\omega}\times r$, tj. vektorski proizvod aksijalnog vektora $\vec{\omega}$ (uglovne brzine) i polarnog vektora r predstavlja polarni vektor.

ZADATAK 2. Vektorski proizvod dva aksijalna vektora je aksijalni vektor, jer po definiciji, a kod promene orijentacije trijedra, ovaj menja znak u suprotni.

ZADATAK 3. Ako se skalarno množi polarni vektor aksijalnim rezultat množenja je *skalar*, no koji je zavisan od orijentacije trijedra (ovo su tzv. *pseudoskalari*).

1.16. RECIPROČNI SISTEM VEKTORA

Iz jednačine $r\cdot a=\alpha$ proizilazi da je $\mathrm{proj}_a r=\dfrac{\alpha}{a}$. To znači da data jednačina definiše samo projekciju vektora r na osu vektora a, pa zato ona ima beskonačno mnogo rešenja. Smatrajući r vektorom položaja tačke u prostoru, jednačina $r\cdot a=\alpha$ predstavlja geometrijsko mesto krajeva vektora r, čiji je početak u polu, a čija je projekcija na osu vektora a jednaka α/a, a to je ravan upravna na vektoru a, čije je rastojanje od pola jednako α/a.

Ako su a, b, c tri nekomplanarna vektora, tj. $a\cdot(b\times c)\neq0$, tada se može postaviti zadatak de se reši sledeći skup jednačina:

(1) $\quad r\cdot a=\alpha,\quad r\cdot b=\beta,\quad r\cdot c=\gamma,$

što geometrijski interpretirano znači da treba odrediti vektor položaja r tačke preseka ravni (1).

Da bismo rešili ovaj zadatak, posmatrajmo mesto skupa jednačina (1) sledeći jednostavniji skup:

(2) $\quad r\cdot a=1,\quad r\cdot b=0,\quad r\cdot c=0.$

Kako je traženi vektor r, prema poslednjim dvema jednačinama, upravan na vektorima b i c, to je on kolinearan sa vektorom $b\times c$, tj.

(3) $\quad r=k\cdot(b\times c).$

Zamenom r iz (3) u prvu od jednačina (1) nalazimo $k\cdot[a\cdot(b\times c)]=1$, odakle je

$$k=\frac{1}{a\cdot(b\times c)}.$$

Iz (3), na osnovu ovoga, dobijamo

(4) $\quad r=(b\times c)/(a\cdot(b\times c))=a^*.$

Analogna rešenja sledeća dva skupa jednačina:

$$r\cdot a=0,\quad r\cdot b=1,\quad r\cdot c=0;\quad r\cdot a=0,\quad r\cdot b=0,\quad r\cdot c=1$$

dovode do vektora

(5) $b^* = (c \times a)/(a \cdot (b \times c))$; $c^* = (a \times b)/(a \cdot (b \times c))$.

Skup vektora a^*, b^*, c^* dat sa (4) i (5) predstavlja *recipročni sistem vektora* sa vektorima a, b, c.

Vektori a^*, b^*, c^* predstavljaju, dakle, rešenja sledeća tri skupa jednačina:

$$a^* \cdot a = 1,\quad b^* \cdot a = 0,\quad c^* \cdot a = 0,$$

(6) $$a^* \cdot b = 0,\quad b^* \cdot b = 1,\quad c^* \cdot b = 0,$$

$$a^* \cdot c = 0,\quad b^* \cdot c = 0,\quad c^* \cdot c = 1.$$

Rešenje skupa jednačina (1) izraženo je sledećom linearnom kombinacijom vektora a^*, b^*, c^*:

(7) $$r = \alpha a^* + \beta b^* + \gamma c^*.$$

Zaista, zamenom r iz (7) na primer u prvu od jednačina skupa (1) i uzimajući u obzir (6) nalazimo

$$r \cdot a = (\alpha a^* + \beta b^* + \gamma c^*) \cdot a = \alpha (a^* a) + \beta (b^* a) + \gamma (c^* a) = \alpha.$$

Rešenje (7) je *jedinstveno* rešenje skupa jednačina (1). Jer ako bi skup (1) imao dva rešenja r_1 i r_2 tada bi vektor $r_1 - r_2$ morao zadovoljavati sledeći skup jednačina:

$$(r_1 - r_2) \cdot a = 0,\quad (r_1 - r_2) \cdot b = 0,\quad (r_1 - r_2) \cdot c = 0,$$

a to znači da bi vektor $r_1 - r_2$ bio istovremeno upravan na tri nekomplanarna vektora a, b, c, što je nemoguće.

ZADATAK 1. Odrediti recipročni sistem vektora za skup jediničnih vektora i, j, k.

Rešenje. Prema obrascima (4) i (5) nalazimo:

$$i^* = \frac{j \times k}{i \cdot (j \times k)} = j \times k = i,\quad j^* = \frac{k \times i}{i \cdot (j \times k)} = k \times i = j,\quad k^* = \frac{i \times j}{i \cdot (j \times k)} = i \times j = k.$$

Nekomplanarnost vektora a^*, b^*, c^* možemo dokazati na ova dva načina.

1. Ako bi a^*, b^*, c^* bili komplanarni, postojala bi relacija oblika

$$c^* = k \cdot a^* + l \cdot b^*,$$

čijim skalarnim množenjem vektorom c nalazimo

$$c^* \cdot c = k \cdot (a^* c) + l \cdot (b^* c),$$

tj. prema (6) dolazi se do protivrečnosti $(1 = 0)$.

2. Koristeći relacije (4) i (5), nalazimo

(8) $$a^* \cdot (b^* \times c^*) = \frac{(b \times c) \cdot ((c \times a) \times (a \times b))}{(a \cdot (b \times c))^3}.$$

Međutim je

$$(c \times a) \times (a \times b) = (a \times b) \times (a \times c) = a \cdot (a \cdot (b \times c)),$$

pa je

$$(b \times c) \cdot ((c \times a) \times (a \times b)) = (a \cdot (b \times c))^2.$$

Zamenom u (8) dobijamo:

(9) $$a^* (b^* \times c^*) = \frac{1}{a (b \times c)}.$$

Kako je $a \cdot (b \times c) \neq 0$, to je prema (9) i $a^* \cdot (b^* \times c^*) \neq 0$, tj. vektori a^*, b^* i c^* nisu komplanarni.

Iz jednakosti (9) proizilaze ova dva zaključka:

1° trijedri vektora a, b, c i a^*, b^*, c^* imaju iste orijentacije;

2° $V^* = \frac{1}{V}$ tj. zapremina paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a^*, b^*, c^* jednaka je recipročnoj vrednosti zapremine paralelepipeda konstruisanog nad vektorima a, b i c.

Ako se skup jednačina (6) napiše u obliku

$$a^* a = 1,\quad a^* b = 0,\quad c^* c = 0,$$

$$b^* a = 0,\quad b^* b = 1,\quad b^* c = 0,$$

$$c^* a = 0,\quad c^* b = 0,\quad c^* c = 1,$$

tada se odavde neposredno zaključuje da je skup vektora a, b, c recipročan sa a^*, b^*, c^*.

ZADATAK 2. Odrediti: 1° lik vektora A u ravnom ogledalu, ako je n jedinični vektor normale njegove ravni; 2° vektor simetričan sa A u odnosu na pravu paralelenu vektoru n.

Rezultat. 1° $n \times (A \times n) - n(An) = A - 2n(A \cdot n)$; 2° $n(An) - (n \times (A \times n)) = 2n(A \cdot n) - A$.

Zadaci za rešavanje

M I, Vektori:

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33, 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29.

2. KRIVE DRUGOG STEPENA

2.1. OPŠTA JEDNAČINA KRIVIH DRUGOG STEPENA

Posmatrajmo u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem opštu jednačinu krivih drugog stepena

(1) $f(x, y) \equiv Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$

Daćemo postupak pomoću koga se određuju: priroda, ose simetrije i metrički elementi krivih drugog stepena. Prethodno ćemo dokazati dva stava.

Stav 1. *Ako su u jednačini* (1) *koeficijenti u linearnim članovima po tekućim koordinatama jednaki nuli, tada koordinatni početak predstavlja centar simetrije krive* (1). *Obrnuto, ako koordinatni početak predstavlja centar simetrije krive* (1), *tada su u jednačini ove krive koeficijenti u linearnim članovima po tekućim koordinatama jednaki nuli.*

Dokaz. Ako je u jednačini (1) $D=0$ i $E=0$, ona dobija oblik:

(2) $Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + F = 0.$

Neka tačka $M(x, y)$ leži na krivoj (2), tada će njene koordinate zadovoljiti jednačinu (2). Međutim i koordinate $(-x, -y)$ tačke M' simetrične sa M u odnosu na koordinatni početak zadovoljavaju ovu jednačinu, što znači da i tačka M' pripada krivoj (2).

Obrnuto, ako je koordinatni početak centar simetrije krive (1), tada proizvoljna prava kroz koordinatni početak $y = mx$ seče krivu (1) u dvema tačkama M i M', čije su apscise koreni jednačine:

(3) $(A + 2\,Bm + Cm^2)\,x^2 + 2\,(D + Em)\,x + F = 0.$

Po uslovu teoreme prava $y = mx$ seče krivu u dve tačke simetrične u odnosu na koordinatni početak. Zato jednačina (3) mora imati korene jednake po apsolutnoj vrednosti, no suprotnog znaka, tj. mora biti

(4) $D + Em = 0.$

Jednakost (4) mora biti indentički zadovoljena za proizvoljni položaj prave $y = mx$, tj. za sve $m \in (-\infty, +\infty)$, a to će biti ako je $D=0$ i $E=0$.

Stav 2. *Ako je u jednačini* (1) *koeficijent uz proizvod tekućih koordinata jednak nuli, tada kriva ima za osu simetrije pravu paralelnu jednoj od koordinatnih osa. Obrnuto, ako kriva* (1) *ima za osu pravu paralelnu jednoj od koordinatnih osa, tada je u njenoj jednačini koeficijent uz proizvod koordinata jednak nuli.*

Dokaz. Neka je u jednačini (1) $B=0$, tada ona ima oblik

(5) $Ax^2 + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$

Tačke preseka krive (5) sa pravom

(6) $x = h$

dobijaju se rešavanjem sistema jednačina (5) i (6). Za određivanje ordinata tačaka preseka linija (5) i (6) imamo jednačinu:

(7) $Cy^2 + 2\,Ey + (Ah^2 + 2\,Dh + F) = 0 \qquad (C \neq 0).$

Ako su y_1 i y_2 rešenja poslednje jednačine, tada tačke preseka krive (5) sa pravom (6) imaju koordinate $M_1(h, y_1)$ i $M_2(h, y_2)$. Ordinata sredine M duži $\overline{M_1M_2}$ data je obrascem

$$y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

a pošto je prema (7)

$$y_1 + y_2 = -\frac{2E}{C},$$

to je

(8) $y_M = -\dfrac{E}{C}.$

Jednakost (8) ne zavisi od h, što znači da je geometrijsko mesto sredina duži $\overline{M_1M_2}$ prava (8) paralelna osi OX, te ova prava predstavlja osu simetrije krive (5). Jednakost (8) ne važi za slučaj $C=0$. U ovom slučaju, a pri uslovu $A \neq 0$, analognim postupkom može se dokazati da kriva ima osu simetrije koja je paralelna osi OY. Koeficijenti A, B, C istovremeno ne mogu biti jednaki nuli, jer jednačina (1) ne bi bila drugog stepena. Zato ako je $B=0$, a $A \neq 0$, $C \neq 0$ kriva ima dve ose simetrije koje su paralelne koordinatnim osama.

Pretpostavimo da kriva (1) ima osu paralelnu osi OX, pa dokažimo da u toj jednačini mora biti $B=0$. Ordinate tačaka preseka krive (1) sa proizvoljnom pravom $x = h$ paralelnom osi OY su koreni jednačine

$$Cy^2 + 2\,(Bh + E)\,y + Ah^2 + 2\,Dh + F = 0.$$

Po uslovu teoreme sredine svih tetiva moraju ležati na pravoj paralelnoj osi OX, tj. suma korena prethodne jednačine mora biti konstantna za proizvoljno h, tj.

$$y_1 + y_2 = -\frac{Bh + E}{C} \qquad (C \neq 0),$$

što će biti samo ako je $B=0$, tj. $y_1 + y_2 = -\dfrac{E}{C}$.

Čitalac može ispitati slučaj koji nastupa za $C=0$.

2.2. KRIVE SA CENTROM

Neka kriva drugog stepena

(1) $Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0,$

ima centar u tački (x_0, y_0). Ako izvršimo translaciju koordinatnog sistema tako da koordinatni početak bude tačka (x_0, y_0) i označimo koordinate u novom sistemu sa x_1 i y_1, obrasci za transformaciju koordinata su

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0.$$

Na osnovu ovoga jednačina (1) postaje

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Ax_0+By_0+D)x+2(Bx_0+Cy_0+E)y$$
$$+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0,$$

gde smo nove koordinate ponovo označili sa x i y.

Da bi novi koordinatni početak zaista bio centar ove krive, na osnovu stava 1 iz 2.1. mora biti

(2) $$Ax_0+By_0+D=0, \quad Bx_0+Cy_0+E=0.$$

Ovaj sistem će imati jedinstveno rešenje po x_0 i y_0 ako i samo ako je

(3) $$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

i tada kriva (1) ima centar u tački (x_0, y_0) koja je određena jednačinama (2) U novom koordinatnom sistemu jednačina krive (1) glasi

(4) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2=F',$$

gde je

(5) $$F'=-\frac{\Delta}{\delta}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Ako je $\Delta=0$ ($\Leftrightarrow F'=0$), jednačina (1) predstavlja dve prave ili tačku. Zato ćemo pretpostaviti da je $\Delta \neq 0$.

Ako je $B=0$, iz (4) mogu se direktno odrediti svi potrebni elementi. Zato ćemo pretpostaviti da je $B \neq 0$.

Dokažimo da se tada jednačini (4) može dati oblik

(6) $$\lambda(y-\alpha x)^2+\mu(y-\beta x)^2=1,$$

gde je

(7) $$\alpha\beta=-1.$$

Upoređivanjem (4) i (6) dolazimo do sistema jednačina

(8) $$\lambda\alpha^2+\mu\beta^2=\frac{A}{F'},$$

(9) $$\lambda\alpha+\mu\beta=-\frac{B}{F'},$$

(10) $$\lambda+\mu=\frac{C}{F'}.$$

Ako iz jednačina (8), (9), (10) eliminišemo λ i μ, dobijamo

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & A \\ \alpha & \beta & -B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix}=0.$$

Koristeći se jednakošću (7) (odakle sleduje $\alpha \neq \beta$), nalazimo jedno za drugim

(11) $$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha+\beta & A \\ \alpha & 1 & -B \\ 1 & 0 & C \end{vmatrix}=0,$$

(12) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta & A \\ 0 & 1 & -B \\ 1 & 0 & C \end{vmatrix}=0,$$

(13) $$\alpha+\beta=-\frac{A-C}{B}=-\varkappa.$$

Na osnovu (7) i (13) zaključujemo da su α i β koreni kvadratne jednačine po z:

(14) $$z^2+\varkappa z-1=0.$$

Koreni ove jednačine su realni i različitog znaka. Dogovorimo se da je

(15) $$\alpha>0, \quad \beta<0.$$

Jednačine (9) i (10) imaju jedinstveno rešenje po λ i μ:

(16) $$\lambda=-\frac{B+C\beta}{(\alpha-\beta)F'}, \quad \mu=\frac{B+C\alpha}{(\alpha-\beta)F'}.$$

Odavde sleduje

(17) $$\lambda\mu=\frac{\delta}{(4+\varkappa^2)F'^2}.$$

Ovim je dokazano da se jednačini (4) zaista može dati oblik (6) ako je $\Delta \neq 0$ i $B \neq 0$. Konstante α i β određuju se iz (14), a λ i μ iz (16).

Rotirajući koordinatni sistem za ugao $\theta=\operatorname{arctg}\alpha \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, jednačina (6) postaje

(18) $$\lambda(\alpha^2+1)\xi^2+\mu(\beta^2+1)\eta^2=1,$$

gde su ξ i η nove koordinate.

Dakle, prave

(19) $$y=\alpha x \text{ i } y=\beta x$$

su ose simetrije krive (4).

Na osnovu (18), (17), (10), (5) zaključujemo da jednačina (1) određuje:

1° Elipsu ako je $\delta>0$ i $C\Delta<0$;

2° Hiperbolu ako je $\delta<0$ i $\Delta \neq 0$;

3° Skup dve prave koje se seku ako je $\delta<0$ i $\Delta=0$;

4° Tačku ako je $\delta>0$ i $\Delta=0$.

Jednačina (1) nema geometrijskog tumačenja u realnom području ako je $\delta>0$ i $C\Delta>0$.

Iako je ova diskusija izvedena pod pretpostavkom $B \neq 0$, bez teškoća se proverava da ona važi i kada je $B=0$.

Kvadrati dužina poluosa krive (1) određuju se pomoću formula

(20) $$\pm a^2 = \frac{1}{\lambda(\alpha^2+1)}, \qquad \pm b^2 = \frac{1}{\mu(\beta^2+1)}.$$

PRIMER 1. Za krivu

$$3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0$$

imamo

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -76.$$

Kako je $\delta \neq 0$, kriva ima centar čije su koordinate $x_0 = -\frac{5}{4}$, $y_0 = \frac{3}{4}$. U ovom slučaju je $\varkappa = 0$, $F' = \frac{19}{2}$, a jednačina (4) glasi

$$3x^2+2xy+3y^2=\frac{19}{2}.$$

Konstante α i β određuju se iz jednačine

$$z^2-1=0 \Rightarrow \alpha=1, \ \beta=-1.$$

Prema tome, ose simetrije date krive su prave

$$y-\frac{3}{4}=x+\frac{5}{4}, \quad y-\frac{3}{4}=-\left(x+\frac{5}{4}\right),$$

tj.

$$y-x=2, \quad y+x=-\frac{1}{2}.$$

Prema (16) je $\lambda=\frac{2}{19}$, $\mu=\frac{4}{19}$. Dakle data kriva je elipsa čije su poluose određene sa

$$a^2=\frac{19}{4}, \quad b^2=\frac{19}{8}.$$

2.3. KRIVE BEZ CENTRA

Za krive bez centra je

(1) $$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Ako je A ili C jednako nuli, tada je $B=0$, pa se neposredno vidi da jednačina (1) iz 2.1. predstavlja parabolu i mogu se direktno odrediti njena osa, teme i parametar. Zato ćemo pretpostaviti da je $AC \neq 0$.

Stavljajući $C=\frac{B^2}{A}$, jednačini (1) iz 2.1. možemo dati oblik

(2) $$(Ax+By)^2+A(2Dx+2Ey+F)=0.$$

Dalje, umesto (2) možemo pisati

(3) $$(Ax+By+\lambda)^2=2A(\lambda-D)x+2(B\lambda-AE)y+\lambda^2-AF,$$

gde je λ konstanta koju ćemo odrediti tako da prave

(4) $$Ax+By+\lambda=0,$$

(5) $$2A(\lambda-D)x+2(B\lambda-AE)y+\lambda^2-AF=0,$$

budu međusobno normalne. Uslov normalnosti ovih pravih glasi

$$A^2(\lambda-D)+B(\lambda B-AE)=0$$

odakle sleduje

(6) $$\lambda=\frac{A(AD+BE)}{A^2+B^2}.$$

Kako su prave (4) i (5), za ovu vrednost λ, normalne i kako jednačina (3) izražava činjenicu da je rastojanje tačke (x, y) od prave (5) proporcionalno kvadratu rastojanja iste tačke od prave (4), zaključujemo da je (3) jednačina parabole.

Osa simetrije ove parabole je prava (4), a prava (5) je njena tangenta u temenu. Ako je $\lambda^2-AF>0$, parabola se nalazi sa one strane prave (5), gde je koordinatni početak, a ako je $\lambda^2-AF<0$, sa suprotne strane.

Postoji jedan izuzetak kada su koeficijenti uz x i y u (5) jednaki nuli. Ako je $\lambda=D$, biće

$$A^2D+ABE=(A^2+B^2)D \Leftrightarrow B(BD-AE)=0,$$

te jednačina (3) postaje

(7) $$(Ax+By+D)^2=D^2-AF.$$

Dakle, jednačina (1) iz 2.1. ako je $\delta=0$ i $B\neq 0$ predstavlja:

1° Parabolu za $BD-AE\neq 0$;

2° Dve paralelne prave za $BD-AE=0$ i $D^2-AF>0$;

3° Jednu dvostruku pravu za $BD-AE=0$ i $D^2-AF=0$.

Jednačina (1) iz 2.1. nema smisla u realnom području za

$$\delta=0, \quad B\neq 0, \quad BD-AE=0 \quad \text{i} \quad D^2-AF<0.$$

Ako je $B=0$, ova diskusija ne važi.

U slučaju 1° parametar parabole je

(8) $$p=\frac{\sqrt{A^2(\lambda-D)^2+(B\lambda-AE)^2}}{A^2+B^2}=\frac{|A(AE-BD)|}{(A^2+B^2)^{3/2}}.$$

PRIMER 1. Posmatrajmo krivu čija je jednačina

$$9x^2-24xy+16y^2-16x-12y-4=0.$$

Za nju je $\delta=0$, $BD-AE=150$. Prema tome, ova kriva je parabola. Na osnovu (6) dobijamo $\lambda=0$. Koristeći (4) i (5), zaključujemo da je prava

$$9x-12y=0, \quad \text{tj.} \quad 3x=4y$$

osa simetrije ove parabole a prava $4x+3y+1=0$ njena tangenta u temenu. Iz (8) dobijamo da je parametar ove parabole $p=\frac{2}{5}$. Kako je $\lambda^2-AF=36>0$, parabola i koordinatni početak nalaze se sa iste strane prave $4x+3y+1=0$.

2.4. PREGLED DISKUSIJE

Na osnovu napred izloženog, diskusija o prirodi krive drugog stepena može se pregledno dati pomoću sledeće tabele.

Krive sa centrom	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta \cdot S < 0$	elipsa
			$\Delta \cdot S > 0$	u realnom području nema smisla
		$\Delta = 0$		tačka
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$		hiperbola
		$\Delta = 0$		dve prave koje se seku
Krive bez centra	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$		parabola
		$\Delta = 0$	$D^2 - AF > 0$	dve paralelne prave
			$D^2 - AF = 0$	jedna dvostruka prava
			$D^2 - AF < 0$	u realnom području nema smisla

U ovoj tabeli korišćene su sledeće oznake

$$S = A + C, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Primer 1. Za krivu

(1) $\qquad 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$

je

$$\delta = \begin{vmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{vmatrix} = 576 > 0.$$

Jednačina (1) određuje krivu sa centrom. Posle redukcije na ose simetrije jednačina (1) postaje

(2) $\qquad A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + F_1 = 0,$

gde su A_1 i C_1 koreni kvadratne jednačine

(3) $\qquad z^2 - Sz + \delta = 0 \qquad (S = A + C = 50),$

a slobodni član je $F_1 = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Jednačina (3) glasi

$$z^2 - 50z + 576 = 0 \Rightarrow (A_1 = 18,\ C_1 = 32).$$

Pošto je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & -7 & 32 \\ -7 & 25 & -32 \\ 32 & -32 & -224 \end{vmatrix} = -288 \cdot 576,$$

dobijamo $F_1 = -288$.

Prema tome, jednačina (2) glasi

$$18x_1^2 + 32y_1^2 - 288 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Dakle, kriva (1) je elipsa sa poluosama 4 i 3.

Zadaci za rešavanje

M I, Analitička geometrija u ravni:

5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.16, 5.17.

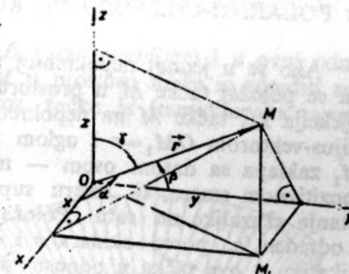
3. TAČKA

3.1. ODREĐIVANJE POLOŽAJA TAČKE. VEKTOR POLOŽAJA

Položaj tačke M u prostoru, u odnosu na tačku O (*pol*), određen je vektorom $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, koji se naziva *vektorom položaja* tačke M.

Ovaj način određivanja položaja date tačke ekvivalentan je određivanju položaja iste skupom od *tri skalara* koje nazivamo *koordinatama tačke M*.

Tako, na primer, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu položaj tačke M određen je skupom tri skalara (x, y, z) koji predstavljaju koordinate (projekcije) vektora položaja $\mathbf{r}$ na ose ovoga sistema (sl. 3.1.1). Označimo li sa $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jedinične vektore osa ovog koordinatnog sistema, tada je



Sl. 3.1.1.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

odakle je

$$r^2 = \mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (r = |\mathbf{r}|).$$

Obrnuto, koordinate x, y, z mogu biti predstavljene u obliku

$$x = \mathbf{r}\mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}\mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}\mathbf{k}.$$

Ako se sa $\mathbf{r}_0$ označi jedinični vektor vektora $\mathbf{r}$, tada je

$$\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{r}_0, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Neka jedinični vektor $\mathbf{r}_0$ zaklapa sa pozitivnim smerovima osa Dekartovog pravouglog sistema uglove α, β i γ, tj.

$$\alpha = \sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{i}), \quad \beta = \sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{j}), \quad \gamma = \sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}),$$

tada, prema relaciji $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ projekcije jediničnog vektora na ose ovoga sistema imaju vrednosti:

$$\cos\alpha = (\mathbf{r}_0\mathbf{i}) = \cos\sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{i}) = \frac{x}{r},$$

$$\cos\beta = (\mathbf{r}_0\mathbf{j}) = \cos\sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{j}) = \frac{y}{r}, \qquad (r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}).$$

$$\cos\gamma = (\mathbf{r}_0\mathbf{k}) = \cos\sphericalangle(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}) = \frac{z}{r}.$$

Odavde se neposredno dobija

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=r_0^2=1.$$

Ako tačka M leži u ravni XOY Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, tada je $z=0$, te je

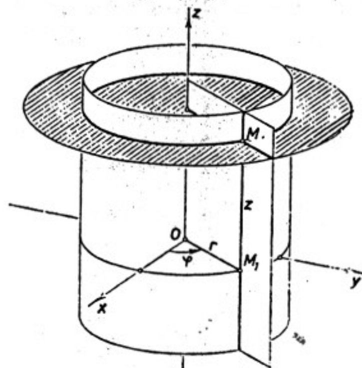
$$\boldsymbol{r}=x\cdot\boldsymbol{i}+y\cdot\boldsymbol{j},$$

odakle je $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Ako je $\sphericalangle(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{i})=\alpha$, tada je $\beta=\sphericalangle(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{j})=\frac{\pi}{2}-\alpha$, te je

$$\cos\alpha=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{i})=\frac{x}{r},\quad \sin\alpha=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{j})=\frac{y}{r}\quad (r=(x^2+y^2)^{1/2}).$$

3.2. POLARNO-CILINDRIČNE KOORDINATE

Ako se u jednoj nepokretnoj ravni fiksira pol O i jedna osa OX (sl. 3.2.1), tada se položaj tačke M u prostoru može odrediti na sledeći način. Ortogonalna projekcija M_1 tačke M na nepokretnu ravan XOY određena je sa dva skalara: radijus-vektorom $OM_1=r$ i uglom φ koji OM_1 zaklapa sa datom osom — merenim u pozitivnom smeru, tj. smeru suprotnom kretanju skazaljke na satu. Položaj tačke M određen je, pored skalara r i φ, još i aplikatom z ove tačke u odnosu na fiksiranu ravan. Skalari (r, φ, z) koji određuju položaj tačke M u prostoru, nazivaju se *polarno-cilindričnim koordinatama tačke M*.



Sl. 3.2.1.

Veza između polarno-cilindričnih i Dekartovih pravouglih koordinata tačke M može se uspostaviti na ovaj način. Ako se fiksirana ravan i osa u ovoj ravni odaberu za koordinatnu ravan XOY odnosno osu OX, tada prema slici sleduju ove veze između Dekartovih pravouglih i polarno-cilindričnih koordinata:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Vektor položaja tačke M u polarno-cilindričnom sistemu može biti predstavljen u obliku:

$$\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}+z\cdot\boldsymbol{k}.$$

Polarno-cilindrične koordinate se izražavaju Dekartovim pomoću obrazaca:

$$r=(x^2+y^2)^{1/2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\quad z=z.$$

Geometrijsko mesto tačaka u prostoru za koje je jedna od koordinata r, φ, z konstantna, a ostale dve promenljive, naziva se *koordinatnom površinom*.

Tako za $r=\text{const}$ koordinatne površine su koaksijalni kružni cilindri sa zajedničkom osom OZ; za $\varphi=\text{const}$ koordinatne površine su ravni koje prolaze kros osu OZ, a zaklapaju ugao φ sa nepokretnom ravni XOZ. Za $z=\text{const}$ koordinatne površine su ravni paralelne sa ravni XOY.

Geometrijsko mesto tačaka za koje su dve od koordinata r, φ, z konstantne, a treća je promenljiva, predstavlja krivu koja se zove *koordinatnom linijom*.

Tako na primer $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ je koordinatna linija koja se javlja kao linija preseka dve koordinatne površine: kružnog cilindra sa osom OZ i ravni koja prolazi kroz ovu osu, a to je izvodnica (generatrisa) ovog cilindra.

ZADATAK. 1. Proučiti koordinatne linije u polarno-cilindričnom sistemu:
1° $r=\text{const}$, $z=\text{const}$; 2° $\varphi=\text{const}$, $z=\text{const}$.

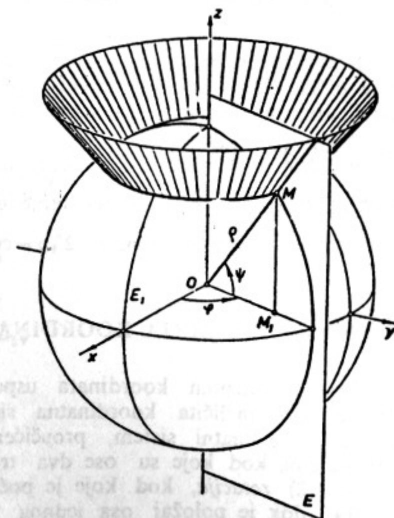
3.3. SFERNE KOORDINATE

Ako se fiksira jedna nepokretna ravan E_1 (*prvi meridijan*) i u ovoj odabere pol O i osa OZ (sl. 3.3.1) položaj tačke M u prostoru može se odrediti na sledeći način. Položaj ravni E koja prolazi kroz tačku M (meridijanska ravan koja sadrži tačku M) i osu OZ u odnosu na fiksiranu ravan E_1 određen je uglom $\varphi\,(0\leq\varphi\leq2\pi)$. Položaj tačke M u meridijanskoj ravni E određen je radijus-vektorom $OM=\rho$ i uglom ψ komplementnim uglu koji OM zaklapa sa fiksiranom osom OZ. Pri tome je

$$0<\rho<+\infty,$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq\psi\leq+\frac{\pi}{2}.$$

Tri skalara φ, ρ, ψ koji određuju položaj tačke M u prostoru nazivaju se *sfernim koordinatama* te tačke.



Sl. 3.3.1.

Ako se ravan prvog meridijana odabere za ravan XOZ Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, a ose OX i OY orijentišu tako da sa osom OZ formiraju trijedar desne orijentacije, tada je prema slici

$$OM_1=\rho\cos\psi,$$

$$z=MM_1=\rho\sin\psi.$$

Ako su (x, y, z) pravougle koordinate tačke M, tada je

$$x=OM_1\cos\varphi,\quad y=OM_1\sin\varphi,\quad z=\rho\sin\psi,$$

tj. prema prethodnoj relaciji:

$$(1)\qquad x=\rho\cos\psi\cos\varphi,\quad y=\rho\cos\psi\sin\varphi,\quad z=\rho\sin\psi.$$

Ove relacije služe za prelaz sa sfernih na Dekartove pravougle koordinate.

Na osnovu njih se vektor položaja tačke M može napisati u obliku:

$$\boldsymbol{r}=\rho\cos\psi\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+\rho\cos\psi\sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}+\rho\sin\psi\cdot\boldsymbol{k}.$$

Kvadriranjem i sabiranjem jednakosti (1) nalazimo

(2) $$\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}.$$

Deobom druge od relacija (1) prvom dobijamo

(3) $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Najzad, kako je prema (1),

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho\cos\psi,\qquad z=\rho\sin\psi,$$

imamo

(4) $$\psi=\operatorname{arctg}\frac{z}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

Prema tome na osnovu jednakosti (2), (3) i (4) dobija se:

$$\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},\quad \varphi=\arg(x+iy),\quad \psi=\arg\left((x^2+y^2)^{1/2}+iz\right).$$

Koordinatne površine $\rho=\text{const}$ su koncentrične sferne površine sa centrom u tački O; $\varphi=\text{const}$ su ravni koje prolaze kroz osu OZ, a $\psi=\text{const}$ su kružne konusne površine sa vrhom u O, čije izvodnice zaklapaju konstantni ugao $\frac{\pi}{2}-\psi$ sa osom OZ.

Zadatak 1. Ispitati koordinatne linije u sfernom koordinatnom sistemu:

1° $\rho=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$; 2° $\rho=\text{const}$, $\psi=\text{const}$; 3° $\varphi=\text{const}$, $\psi=\text{const}$.

3.4. TRANSFORMACIJA KOORDINATA

Transformacijom koordinata uspostavlja se veza između koordinata iste tačke u dva različita koordinatna sistema. Ograničavajući se na Dekartov pravougli koordinatni sistem, proučićemo dve vrste transformacija koordinata: 1) *translaciju*, kod koje su ose dva trijedra paralelne, a počeci im se ne poklapaju i 2) *rotaciju*, kod koje je početak dvaju trijedara u zajedničkoj tački prostora, dok je položaj osa jednog trijedra proizvoljan u odnosu na drugi.

3.4.1. TRANSLACIJA

Ako dva Dekartova pravougla sistema $OXYZ$ i $O_1X_1Y_1Z_1$ iste orijentacije imaju paralelne ose i ako je $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ vektor položaja tačke M s obzirom na pol O, a $\overrightarrow{O_1M}=\boldsymbol{r}_1$ vektor položaja iste tačke s obzirom na pol O_1 tada je

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OO_1}+\boldsymbol{r}_1.$$

Za $\boldsymbol{r}=(X, Y, Z)$, $\boldsymbol{r}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$, $\overrightarrow{OO_1}=(a, b, c)$, iz prethodne vektorske jednakosti proizilazi:

(1) $$X=a+X_1,\quad Y=b+Y_1,\quad Z=c+Z_1,$$

a odavde

(2) $$X_1=X-a,\quad Y_1=Y-b,\quad Z_1=Z-c.$$

Obrascima (1) su određene koordinate tačke M u sistemu $OXYZ$ na osnovu poznatih koordinata iste tačke u trijedru $O_1X_1Y_1Z_1$ i koordinata početka O_1 u odnosu na prvobitni sistem. Obrasci (2) određuju koordinate tačke M u sistemu $O_1X_1Y_1Z_1$ iz koordinata X, Y, Z u sistemu $OXYZ$ i koordinata tačke O_1 u odnosu na poslednji sistem.

Obe grupe jednakosti (1) i (2) za transformaciju Dekartovih pravouglih koordinata karaktetišu *translaciju* koordinatnog sistema.

3.4.2. ROTACIJA

Uočimo dva Dekartova pravougla koordinatna sistema $OXYZ$ i $OX_1Y_1Z_1$ sa zajedničkim početkom O. Neka su $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jedinični vektori osa sistema $OXYZ$, a $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ jedinični vektori osa sistema $OX_1Y_1Z_1$. Najzad, neka je vektor položaja tačke M u prvom sistemu $\boldsymbol{r}=(X, Y, Z)$, a u drugom $\boldsymbol{r}=(X_1, Y_1, Z_1)$.

Tada je

$$\boldsymbol{r}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}=X_1\boldsymbol{i}_1+Y_1\boldsymbol{j}_1+Z_1\boldsymbol{k}_1.$$

Odavde je

$$X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}=X_1\boldsymbol{i}_1+Y_1\boldsymbol{j}_1+Z_1\boldsymbol{k}_1.$$

Sukcesivnim skalarnim množenjem poslednje jednakosti najpre jediničnim vektorima $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, a zatim vektorima $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$, dobijamo sledeće dve grupe jednakosti:

(1) $$\begin{aligned}X&=(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i})X_1+(\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{i})Y_1+(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{i})Z_1,\\ Y&=(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{j})X_1+(\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{j})Y_1+(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{j})Z_1,\\ Z&=(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{k})X_1+(\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{k})Y_1+(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k})Z_1;\end{aligned}$$

i

(2) $$\begin{aligned}X_1&=(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_1)X+(\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}_1)Y+(\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}_1)Z,\\ Y_1&=(\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}_1)X+(\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}_1)Y+(\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}_1)Z,\\ Z_1&=(\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}_1)X+(\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}_1)Y+(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_1)Z.\end{aligned}$$

Stavimo

$$\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}=\alpha,\ \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{j}=\beta,\ \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{k}=\gamma,\ \boldsymbol{j}_1\boldsymbol{i}=\lambda,\ \boldsymbol{j}_1\boldsymbol{j}=\mu,\ \boldsymbol{j}_1\boldsymbol{k}=\nu,\ \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{i}=\rho,\ \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{j}=\sigma,\ \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}=\tau,$$

tada (1) i (2) postaju

(3) $$X=\alpha X_1+\lambda Y_1+\rho Z_1,\quad Y=\beta X_1+\mu Y_1+\sigma Z_1,\quad Z=\gamma X_1+\nu Y_1+\tau Z_1,$$

tj.

(4) $$X_1=\alpha X+\beta Y+\gamma Z,\quad Y_1=\lambda X+\mu Y+\nu Z,\quad Z_1=\rho X+\sigma Y+\tau Z.$$

Obrascima (1) odnosno (3) izražene su linearno stare koordinate (X, Y, Z) novim (X_1, Y_1, Z_1), a obrascima (2) odnosno (4) izražene su linearno nove koordinate starim.

Pošto su posmatrani sistemi pravougli, vektori

$$u_1=(\alpha,\beta,\gamma),\quad v_1=(\lambda,\mu,\nu),\quad w_1=(\rho,\sigma,\tau),$$

a isto tako i

$$u=(\alpha,\lambda,\rho)\quad v=(\beta,\mu,\sigma),\quad w=(\gamma,\nu,\tau)$$

su jedinični vektori, te važe jednakosti

$$u_1^2=1,\quad v_1^2=1,\quad w_1^2=1,\quad u_1v_1=v_1w_1=w_1u_1=0;$$
$$u^2=1,\quad v^2=1,\quad w^2=1,\quad uv=vw=wu=0.$$

Njima odgovaraju šest analitičkih izraza:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,\quad \rho^2+\sigma^2+\tau^2=1,$$

(5) $$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0,\quad \lambda\rho+\mu\sigma+\nu\tau=0,\quad \alpha\rho+\beta\sigma+\gamma\tau=0;$$

$$\alpha^2+\lambda^2+\rho^2=1,\quad \beta^2+\mu^2+\sigma^2=1,\quad \gamma^2+\nu^2+\tau^2=1,$$

(6) $$\alpha\beta+\lambda\mu+\rho\sigma=0,\quad \beta\gamma+\mu\nu+\sigma\tau=0,\quad \gamma\alpha+\nu\lambda+\tau\rho=0.$$

Kao posledica jednakosti (5) dobija se

$$u_1v_1w_1=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \lambda & \mu & \nu\\ \rho & \sigma & \tau\end{vmatrix}\cdot(u\,v\,w),$$

a kako je $u_1v_1w_1=\pm 1$ i $u\,v\,w=\pm 1$, to je

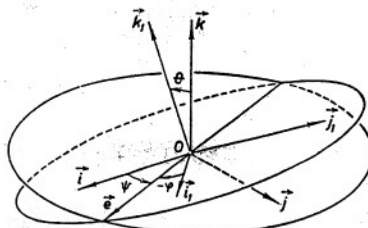
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \lambda & \mu & \nu\\ \rho & \sigma & \tau\end{vmatrix}=\pm 1,$$

gde znak + odgovara istim, a znak — suprotnim orijentacijama dva trijedra.

Odavde proizilazi, da je položaj jednog Dekartovog pravouglog sistema u odnosu na drugi sa zajedničkim početkom određen sa tri *nezavisna parametra*.[1]

3.4.3. EULEROVI UGLOVI

Posmatrajmo dva pravougla trijedra $[i,j,k]$ i $[i_1,j_1,k_1]$. Ravni (i,j) i (i_1,j_1) seku se po pravoj koja se zove *linija čvorova* (sl. 3.4.3.1.). Neka je osa koja se poklapa sa ovom linijom definisana jediničnim vektorom e. Budući da linija čvorova leži u obe ravni (i,j) i (i_1,j_1), to je jedinični vektor e upravan na k i k_1 i obrazuju s njima trijedar desne orijentacije. Uvedemo li ugao $\sphericalangle(k,k_1)=\theta$, tada se ovaj ugao naziva *uglom nutacije*. Stoga je



Sl. 3.4.3.1.

(1) $$e=\frac{k\times k_1}{|k\times k_1|}=\frac{(k\times k_1)}{\sin\theta}$$

a osim toga je $kk_1=\cos\theta$.

[1] U terminologiji teorijske mehanike nezavisni parametri kojima je definisan položaj jednog trijedra u odnosu na drugi nazivaju se *stepenima slobode*.

Ugao $\sphericalangle(i,e)=\psi$ za koji treba okrenuti jedinični vektor i u ravni (i,j) u pozitivnom smeru da bi se poklopio sa vektorom e naziva se *uglom precesije*. Iz sl. 3.4.3.1 proizilazi:

$$e=i\cos\psi+j\sin\psi.$$

Ugao $\sphericalangle(e,i_1)=\varphi$ u ravni (i_1,j_1) za koji treba obrnuti vektor e da bi se poklopio sa i_1 naziva se *uglom rotacije*. Kako je $\sphericalangle(i_1,e)=-\varphi$, to će biti

(2) $$e=i_1\cos(-\varphi)+j_1\sin(-\varphi)=i_1\cos\varphi-j_1\sin\varphi.$$

Tri ugla: θ, ψ, φ nazivaju se *Eulerovim uglovima*. Ovi uglovi potpuno definišu položaj jednog trijedra u odnosu na drugi: ako je dat trijedar $[i,j,k]$ i Eulerovi uglovi θ, ψ, φ, jednoznačno je određen trijedar $[i_1,j_1,k_1]$.

Stvarno, vektorskim množenjem jednačine (1) sa k nalazimo:

$$(k\times k_1)\times k=(e\times k)\cdot\sin\theta,\quad \text{tj.}\quad k_1\cdot k^2-k\,(kk_1)=(e\times k)\cdot\sin\theta.$$

Kako je $k^2=1$, $kk_1=\cos\theta$, to iz poslednje relacije proizilazi

(3) $$k_1-k\cos\theta=(e\times k)\cdot\sin\theta.$$

Vektorskim množenjem relacije (2) sa k_1 nalazimo:

$$e\times k_1=(i_1\times k_1)\cdot\cos\varphi-(j_1\times k_1)\cdot\sin\varphi,$$

a na osnovu $(j_1\times k_1)=i_1$, $(k_1\times i_1)=j_1$, dobijamo

(4) $$e\times k_1=-i_1\cdot\sin\varphi-j_1\cdot\cos\varphi.$$

Množenjem relacije (2) sa $\cos\psi$ i (4) sa $\sin\varphi$ i oduzimanjem drugog proizvoda od prvog nalazimo

(5) $$i_1=e\cos\varphi-(e\times k_1)\sin\varphi.$$

Analogno je

(6) $$-j_1=e\sin\varphi+(e\times k_1)\cos\varphi.$$

U (5) i (6) treba zameniti k_1 iz (3), pa se dobijaju jedinični vektori i_1 i j_1 izraženi Eulerovim uglovima θ, ψ, φ i jediničnim vektorima i, j, k.

Vektorskim množenjem relacije (3) sa e nalazimo:

$$e\times k_1=e\times(k\cos\theta+(e\times k)\cdot\sin\theta)=(e\times k)\cos\theta+\big(e\times(e\times k)\big)\cdot\sin\theta,$$

tj. posle uprošćenja desne strane:

$$e\times k_1=(e\times k)\cdot\cos\theta-k\cdot\sin\theta.$$

Zamenom ove vrednosti za $(e\times k_1)$ u (5) i (6) nalazimo:

(7) $$\begin{aligned} i_1&=e\cos\theta-(e\times k)\cos\theta\sin\varphi+k\cdot\sin\theta\sin\varphi,\\ j_1&=-e\sin\varphi-(e\times k)\cos\theta\cos\varphi+k\cdot\sin\theta\cos\varphi,\end{aligned}$$

gde je $e=i\cos\psi+j\sin\psi$. Zato je i

$$e\times k=(i\cos\psi+j\sin\psi)\times k=-j\cos\psi+i\sin\psi,$$

pa jednakosti (7) i (3) posle zamene i svih uprošćenja daju:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1 &= \boldsymbol{i}\cdot(\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\\ &\quad+\boldsymbol{j}\cdot(\sin\psi\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)+\boldsymbol{k}\cdot\sin\theta\sin\varphi,\\ \boldsymbol{j}_1 &= \boldsymbol{i}\cdot(-\cos\psi\sin\varphi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\\ &\quad+\boldsymbol{j}\cdot(-\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi)+\boldsymbol{k}\cdot\sin\theta\cos\varphi,\\ \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{i}\cdot\sin\psi\sin\theta+\boldsymbol{j}\cdot(-\cos\psi\sin\theta)+\boldsymbol{k}\cdot\cos\theta, \end{aligned}$$

tj. trijedar $[\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1]$ je jednoznačno definisan EULERovim uglovima θ, ψ, φ u odnosu na trijedar $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$.

3.5. RASTOJANJE DVE TAČKE

Ako su M_1 i M_2 dve tačke u prostoru određene respektivno vektorima položaja $\boldsymbol{r}_1$ odnosno $\boldsymbol{r}_2$ u odnosu na pol O, vektor relativnog položaja tačke M_2 u odnosu na M_1 predstavljen je razlikom

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1.$$

Rastojanje tačaka M_1 i M_2 predstavlja modul vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$, tj.

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|.$$

Ako su vektori položaja krajeva duži M_1M_2 dati svojim projekcijama:

$$\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1, z_1), \quad \boldsymbol{r}_2=(x_2, y_2, z_2),$$

tada je

$$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=((x_2-x_1),\ (y_2-y_1),\ (z_2-z_1)),$$

te poslednja jednakost daje analitički izraz za rastojanje dveju tačaka u prostoru:

$$d=((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2)^{1/2}.$$

U specijalnom slučaju, kad tačke M_1 i M_2 leže u ravni XOY, tada je $z_1=z_2=0$, pa će biti

$$d=((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)^{1/2}.$$

Jedinični vektor pravca i smera vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ je

$$\text{ort}\ \overrightarrow{M_1M_2}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{d},$$

a njegove projekcije na ose koordinatnog sistema su

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d}, \quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d}, \quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}.$$

Za vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ u ravni XOY, ort $\overrightarrow{M_1M_2}$ ima projekcije

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d}, \quad \sin\alpha=\frac{y_2-y_1}{d}.$$

3.6. DEOBA DUŽI PO DATOJ RAZMERI. VEKTOR POLOŽAJA TEŽIŠTA TROUGLA

Duž M_1M_2 je data vektorima položaja $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ svoje početne tačke M_1 odnosno krajnje tačke M_2; treba odrediti vektor položaja $\boldsymbol{R}$ tačke M_0 koji deli duž M_1M_2 po datoj razmeri, tj. tako da je

$$\frac{M_1M_0}{M_0M_2}=\lambda \quad (\lambda>0).$$

Na osnovu ove jednakosti i smera vektora $\overrightarrow{M_1M_0}$ i $\overrightarrow{M_0M_2}$ imamo:

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\lambda\cdot\overrightarrow{M_0M_2}, \quad \overrightarrow{M_1M_0}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{M_0M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{R},$$

pa prethodna jednakost postaje

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_1=\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{R}).$$

Rešenje ove vektorske jednačine po $\boldsymbol{R}$ daje vektor položaja tačke M_0 u obliku

(1) $$\boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}.$$

Ako su vektori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}_i$ $(i=1, 2)$ dati svojim projekcijama

$$\boldsymbol{R}=(x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1, z_1), \quad \boldsymbol{r}_2=(x_2, y_2, z_2),$$

tada će vektorskoj jednačini (1) odgovarati ove tri skalarne:

(2) $$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

U specijalnom slučaju, kad tačka M_0 leži na sredini duži M_1M_2, tada je $\lambda=1$ i vektor položaja $\boldsymbol{R}$ tačke M_0 *sredine duži* M_1M_2 određen je prema (1) relacijem:

(3) $$\boldsymbol{R}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2).$$

Koordinate tačke M_0 u ovom slučaju određuju se iz obrazaca

(4) $$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2), \quad z_0=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

Ako tačke M_1 i M_2 leže u ravni XOY, tada će i M_0 ležati u ovoj ravni. Vektorski obrasci (1) i (3) ostaju u važnosti, a odgovarajući skalarni obrasci (2) i (4), pošto je $z_0=z_1=z_2=0$, dobijaju respektivno ove oblike:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

odnosno

$$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

PRIMER 1. Date su tri tačke u prostoru $A=(\boldsymbol{r}_1)$, $B=(\boldsymbol{r}_2)$ i $C=(\boldsymbol{r}_3)$ koje ne leže na jednoj pravoj liniji. Odrediti vektor položaja težišta trougla ABC kao funkciju vektora položaja njegovih temena $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ i $\boldsymbol{r}_3$.

Neka je $S=(\xi, \eta, \zeta)$ vektor polažaja težišta S trougla ABC, a r_D vektor položaja tačke D, sredine strane BC. Na osnovu poznatog geometrijskog stava o težištu trougla imamo:

(5) $$\frac{AS}{SD}=2=\lambda,$$

te na osnovu (1) dobijamo za vektor položaja tačke S koja duž AD, težišnu liniju, deli u razmeri (5)

(6) $$S=\frac{1}{3}(r_1+2r_D).$$

Kako tačka $D=(r_D)$ leži na sredini duži BC, vektor položaja r_D ove tačke prema (3) dat je sa $r_D=\frac{1}{2}(r_2+r_3)$, odakle je $2r_D=r_2+r_3$.

Zamenom ove vrednosti za $2r_D$ u (6) dobijamo za vektor položaja težišta S:

(7) $$S=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3).$$

Odgovarajući skalarni obrasci za određivanje koordinata težišta su:

(8) $$\xi=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad \eta=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),\quad \zeta=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3).$$

U specijalnom slučaju, kad trougao ABC leži u koordinatnoj ravni XOY, vektorski obrazac (7) ostaje u važnosti, dok se skalarni obrasci (8), na osnovu toga što je $z_1=z_2=z_3=\zeta=0$, svode na dva:

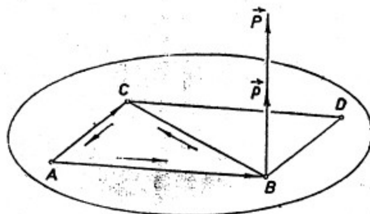
$$\xi=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad \eta=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

3.7. POVRŠINA TROUGLA

Ako je trougao ABC (sl. 3.7.1) dat vektorima položaja svojih temena $A=(r_1)$, $B=(r_2)$, $C=(r_3)$, tada se može površina ovog trougla izraziti kao funkcija ovih vektora na sledeći način. Na osnovu definicije vektorskog proizvoda dva vektora, modul vektorskog proizvoda $P=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, tj. $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ predstavlja površinu paralelograma $ABCD$ ili dvostruku površinu trougla ABC. Stoga, ako se usvoji smer obilaženja trougla ABC označen na slici, između vektora površine p trougla ABC i vektora površine P paralelograma postoji veza $p=P/2$, tj.

$$p=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$$

Modul vektora p, tj. $|p|=p$ predstavlja površinu trougla ABC, te je



Sl. 3.7.1.

(1) $$p=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

Kako je $\overrightarrow{AB}=r_2-r_1$, $\overrightarrow{AC}=r_3-r_1$, jednakost (1) postaje

(2) $$p=\frac{1}{2}|(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)|$$

Obrazac (2) izražava površinu trougla ABC kao funkciju vektora položaja njegovih temena.

Odgovarajući analitički obrazac za površinu trougla dobićemo ako se prethodno uzme u obzir da je

$$2p=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},$$

tj.

$$2p=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot i+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}\cdot j+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdot k$$

Odavde se dobija analitički obrazac za površinu trougla:

(3) $$p=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2\right)^{1/2}$$

Za slučaj kad trougao ABC leži u koordinatnoj ravni XOY biće $z_1=z_2=z_3=0$, te obrazac (3) daje

$$p=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|,$$

ili u obliku

(4) $$p=\frac{1}{2}\bmod\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ako tačke A, B, C leže na jednoj pravoj liniji, tada je $p=0$, te je prema (2):

(5) $$(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)=0,$$

ili

(6) $$(r_1\times r_2)+(r_2\times r_3)+(r_3\times r_1)=0.$$

Relacije (5) ili (6) predstavljaju uslov da tri tačke A, B i C leže na jednoj pravoj liniji. U vektorskom obliku (5) ovaj uslov izražava uslov kolinearnosti vektora r_2-r_1 i r_3-r_1. Analitički ovaj uslov je izražen sledećom dvostrukom jednakošću:

(7) $$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}.$$

Ako tačke A, B i C leže na jednoj pravoj liniji u ravni XOY, tada je $z_1=z_2=z_3=0$, te uslov (7) dobija oblik:

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1},$$

tj. prema (4),

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. RAVAN

4.1. JEDNAČINA RAVNI U OPŠTEM OBLIKU

Poznato je da se iz jednakosti

$$xa=b \qquad (a\neq 0),$$

gde su x, a, b skalari, *jednoznačno* može odrediti faktor x, tj. $x=\frac{b}{a}$.

Posmatrajmo jednakost

(1) $\quad \boldsymbol{xa}=b,$

gde je b skalar koji se javlja kao rezultat skalarnog množenja vektora $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{a}$. Ako pretpostavimo da su vrednosti skalarnog proizvoda b i vektora $\boldsymbol{a}$ poznate, može se postaviti problem analogan onom gornjem u skalarnoj algebri, naime: da li se nepoznati činilac $\boldsymbol{x}$ može jednoznačno odrediti iz jednakosti (1) u kojoj su b i $\boldsymbol{a}$ zadati skalar odnosno vektor?

Ako jednakost (1) napišemo u obliku

$$(\boldsymbol{xa}_0)\cdot a=b \qquad (\boldsymbol{a}_0=\text{ort } \boldsymbol{a}),$$

tada je

(2) $\quad \boldsymbol{xa}_0=\frac{b}{a}.$

Međutim je

$$\boldsymbol{xa}_0=\text{proj}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{x},$$

gde smo sa $\text{proj}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{x}$ označili projekciju vektora $\boldsymbol{x}$ na osu vektora $\boldsymbol{a}$. Na osnovu poslednje jednakosti možemo jednačinu (2) napisati u obliku

(3) $\quad \text{proj}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{x}=\frac{b}{a}$

To znači da je jednačinom (1) jednoznačano definisana samo projekcija vektora $\boldsymbol{x}$ na osu vektora $\boldsymbol{a}$. Dovedemo li vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{x}$ na zajednički početak O, tada nam jednačina (3) pokazuje da se vektor $\boldsymbol{x}$ može menjati ali tako da njegova projekcija na vektoru $\boldsymbol{a}$ ostaje konstantna i jednaka skalaru $\frac{b}{a}$. To znači da se vektor $\boldsymbol{x}$ menja tako da njegov početak ostaje u utvrđenom polu O, a kraj mu leži u ravni koja je upravna na vektoru $\boldsymbol{a}$ i čije je rastojanje od pola jednako $\frac{|b|}{a}$

Iz svega napred izloženog proizilaze sledeći zaključci:

1° relacijom (1) nije jednoznačno definisan nepoznati vektor $\boldsymbol{x}$, ako su pri tom vektor $\boldsymbol{a}$ i skalar b određeni;

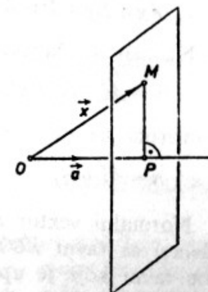
2° geometrijsko mesto krajeva vektora $\boldsymbol{x}$ je ravan upravna na vektoru $\boldsymbol{a}$, a koja leži na rastojanju $\frac{|b|}{a}$ od pola O.

Prema tome, relacija (1) predstavlja jednačinu one ravni u kojoj $\boldsymbol{x}$ označava vektor položaja proizvoljne tačke ravni, a $\boldsymbol{a}$ vektor koji je upravan na ovoj ravni (sl. 4.1.1). U daljem izlaganju vektor $\boldsymbol{a}$ ćemo zvati *normalnim vektorom* ravni.

U analitičkoj geometriji se jednačina (1) piše u obliku:

(4) $\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}+D=0.$

i predstavlja *jednačinu ravni u opštem vektorskom obliku.* U njoj $\boldsymbol{r}$ predstavlja vektor položaja proizvoljne tačke ravni, $\boldsymbol{n}$ — normalni vektor ravni, a D proizvoljni skalar.



Sl. 4.1.1.

Ako su vektori $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{n}$ dati svojim projekcijama na ose Dekartovog pravouglog sistema: $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, odnosno $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$, tada je

$$\boldsymbol{rn}=Ax+By+Cz,$$

pa će jednačina (4) dati sledeći analitički izraz za jednačinu ravni u opštem obliku:

(5) $\quad Ax+By+Cz+D=0.$

U ovoj jednačini (x, y, z) predstavljaju tekuće koordinate tačke ravni, a A, B i C — projekcije normalnog vektora ravni na ose Dekartovog pravouglog sistema.

Ako je $\boldsymbol{n}_0$ jedinični vektor pravca i smera normalnog vektora $\boldsymbol{n}$, iz relacije

$$\boldsymbol{n}_0=\frac{\boldsymbol{n}}{n}$$

proizilaze sledeći analitički izrazi za projekcije jediničnog normalnog vektora $\boldsymbol{n}_0$ (kosinuse uglova koje ovaj vektor zaklapa sa koordinatnim osama):

$$\cos\alpha=\frac{A}{n}, \quad \cos\beta=\frac{B}{n}, \quad \cos\gamma=\frac{C}{n}, \quad n=(A^2+B^2+C^2)^{1/2}.$$

Primetimo da jednačina (5) u stvari sadrži *tri parametra,* jer ako je, na primer $D\neq 0$, to posle deobe sa D ova se svodi na jednačinu:

$$A_1x+B_1y+C_1z+1=0,$$

u kojoj su $A_1=\frac{A}{D}$, $B_1=\frac{B}{D}$, $C_1=\frac{C}{D}$ pomenuta tri parametra.

Vektorski oblik (4) odnosno analitički oblik (5) opšte jednačine može u izvesnim slučajevima da ima jednostavniji oblik.

Tako, ako je nezavisni član $D=0$, jednačine (4) i (5) dobijaju respektivno oblik:

$$\boldsymbol{rn}=0 \quad \text{odnosno} \quad Ax+By+Cz=0.$$

Prvu zadovoljava nula-vektor $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ odnosno drugu $x=0$, $y=0$, $z=0$

To znači da ravan, u čijoj je jednačini nezavisni član jednak nuli, prolazi kroz koordinatni početak. Njena jednačina sadrži dva parametra npr. $\frac{A}{C}=A_1$ i $\frac{B}{C}=B_1$, $(C\neq 0)$.

Ako je $D\neq 0$, a koeficijent uz jednu od tekućih koordinata u jednačini (5) je jednak nuli, npr. $C=0$, tada se ova jednačina svodi na sledeću:

(6) $$Ax+By+D=0.$$

Na osnovu činjenice da je normalni vektor ravni

$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

a s obzirom na uslov da je $C=0$, imamo

$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}.$$

Normalni vektor $\boldsymbol{n}$ u ovom slučaju stoji upravno na osi OZ (leži u ravni paralelnoj sa ravni XOY), a to znači da jednačina (6) predstavlja opštu jednačinu ravni koja je upravna na ravni XOY, ili paralelna osi OZ. Ova jednačina sadrži dva parametra $\left(\text{npr. } \frac{A}{D} \text{ i } \frac{B}{D},\quad D\neq 0\right)$.

Ako je u (6) i nezavisni član $D=0$, to se ova jednačina svodi na

(7) $$Ax+By=0$$

koja sadrži jedan parametar $\left(\text{npr. } \frac{A}{B}=A_1\right)$. Ova ravan prolazi kroz početak i upravna je na ravni XOY, tj. jednačina (7) predstavlja opštu jednačinu ravni koja prolazi kroz osu OZ.

Analognim rezonovanjem se može zaključiti da jednačina

$$By+Cz+D=0 \qquad (D\neq 0)$$

predstavlja opštu jednačinu ravni normalnu na ravni YOZ (paralelnu osi OX), dok jednačina

$$By+Cz=0$$

predstavlja opštu jednačinu ravni koja prolazi kroz osu OX. Najzad, jednačina ravni koja je upravna na ravni XOZ ima oblik:

$$Ax+Cz+D=0 \qquad (D\neq 0),$$

dok jednačiua ravni koja prolazi kroz osu OY glasi

$$Ax+Cz=0.$$

Ako su dve projekcije normalnog vektora $\boldsymbol{n}$ jednake nuli, na primer $A=0$ i $B=0$, tada je $\boldsymbol{n}=C\boldsymbol{k}$, tj. ovaj vektor je upravan na ravni XOY. Jednačina (5) se svodi na

$$Cz+D=0 \qquad (D\neq 0)$$

i predstavlja jednačinu ravni paralelnu koordinatnoj ravni XOY Njoj se može dati i ovaj oblik:

$$z=z_0 \qquad \left(z_0=-\frac{D}{C}\right)$$

Ako je $A=B=D=0$, jednačina (5) se svodi na $z=0$ i predstavlja jednačinu koordinatne ravni XOY

Analogno jednačina

$$Ax+D=0 \quad \text{ili} \quad x=x_0$$

predstavlja opštu jednačinu ravni paralelne sa ravni YOZ, a jednačina $x=0$ je jednačina koordinatne ravni YOZ.

Najzad

$$By+D=0, \quad \text{ili} \quad y=y_0$$

predstavlja jednačinu ravni paralelne koordinatnoj ravni XOZ, a jednačina $y=0$ predstavlja jednačinu koordinatne ravni XOZ.

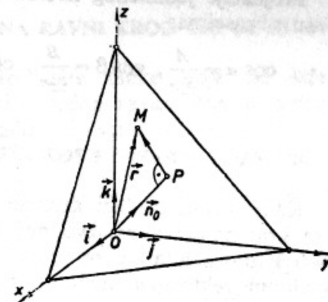
4.2. RAZLIČITI OBLICI JEDNAČINE RAVNI

Jednačina ravni predstavlja jednakost koja vezuje vektor položaja proizvoljne tačke ravni sa onim parametrima koji određuju ovu ravan u odnosu na trijedar jediničnih vektora. U zavisnosti od načina izbora ovih parametara može se jednačina ravni pisati u različitim oblicima.

4.2.1. NORMALNI OBLIK JEDNAČINE RAVNI

Da bismo dobili normalni (HESSEov) oblik jednačine ravni, treba za parametre položaja izabrati: normalno rastojanje $OP=p$ $(p>0)$ ravni od pola O (koordinatnog početka) i jedinični normalni vektor $\boldsymbol{n}_0$ sa početkom u polu O. Neka je $M=(\boldsymbol{r})$ proizvoljna tačka ravni (sl. 4.2.1.1). Kako je $OP=p$ normalno rastojanje pola od ravni, to je ravan upravna na OP, ili što je isto — na normalnom jediničnom vektoru $\boldsymbol{n}_0$. Stoga će se, za proizvoljnu tačku M u ravni, projekcija krajnje tačke njenog vektora položaja $\boldsymbol{r}$ na osu jediničnog vektora $\boldsymbol{n}_0$ poklopiti sa $OP=p$, tj. ta projekcija će imati vrednost

$$\text{proj}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{r}=p.$$



Sl. 4.2.1.1.

Kako je

$$\text{proj}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0),$$

prethodna jednačina postaje

(1) $$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0-p=0.$$

Jednačina (1) predstavlja *normalni* (HESSEov) *vektorski oblik* jednačine ravni. Imajući u vidu da je

$$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z), \quad \boldsymbol{n}_0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),$$

odgovarajući analitički oblik ove jednačine će biti

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Opšti vektorski oblik jednačine ravni

(2) $\quad rn+D=0$

može se svesti na normalni deljenjem leve i desne strane poslednje jednačine sa $\pm n$, posle čega se dobija:

$$\frac{nr}{\pm n}+\frac{D}{\pm n}=0, \qquad (n=|n|)$$

ili

(3) $$\left(r, \frac{n}{\pm n}\right)+\frac{D}{\pm n}=0.$$

Jednačina (3) je dovedena na oblik (1), pri čemu ispred n od dva znaka treba odabrati znak suprotan znaku nezavisnog člana D, jer mora biti

$$\frac{D}{\pm n}=-p<0.$$

Jednačina (3) piše se i u ovom obliku

(4) $$\frac{(rn+D)}{\pm n}=0$$

i predstavlja normalni oblik jednačine ravni, na koji je dovedena jednačina zadata u opštem obliku (2).

Ako se posmatra analitički oblik jednačine (2)

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

prema (4) njoj odgovarajući normalni oblik je

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm(A^2+B^2+C^2)^{1/2}}=0.$$

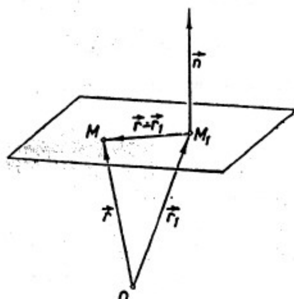
Projekcije jediničnog normalnog vektora n_0 i rastojanje p u ovom slučaju dati su obrascima:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm n},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm n},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm n},\ -p=\frac{D}{\pm n} \qquad (n^2=A^2+B^2+C^2).$$

4.2.2. JEDNAČINA RAVNI KROZ JEDNU TAČKU NORMALNA NA DATOM VEKTORU

Kako ravan prolazi kroz datu tačku $M_1=(r_1)$, to vektor $\overrightarrow{M_1M}=r-r_1$, čiji se kraj nalazi u proizvodnoj tački $M=(r)$ ravni, a početak mu je u tački $M_1=(r_1)$, mora ležati u ovj ravni (sl. 4.2.2.1). Zato on mora biti upravan na normalnom vektoru n ravni, tj. mora biti

(1) $\quad (r-r_1)\cdot n=0.$



Sl. 4.2.2.1.

Jednačina (1) predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz jednu datu tačku $M_1=(r_1)$, a upravna je na vektoru n.

Do jednačine (1) može se formalno doći i na sledeći način. Pođimo od opšte jednačine ravni u vektorskom obliku

$$rn+D=0.$$

Tada, kako ravan prolazi kroz datu tačku M_1, mora biti

$$r_1n+D=0.$$

Oduzimanjem poslednje relacije od predposlednje dobija se jednačina (1). Kako vektori $r-r_1$ i n imaju projekcije:

$$r-r_1=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1); \quad n=(A,\ B,\ C),$$

to će analitički oblik jednačine ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ biti, prema (1), sledeći

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

ZADATAK 1. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_1=(r_1)$, a paralelna je sa dva nekolinearna vektora a i b.

Rešenje. Jednačina tražene ravni imaće oblik: $(r-r_1)\cdot n=0$. Kako je ova ravan paralelna sa vektorima a i b, to je proizvoljni vektor koji je kolinearan sa $a\times b$ upravan na ravni i može se uzeti za normalni vektor ravni. To znači da se može uzeti

$$n=\lambda(a\times b) \qquad (\lambda \text{ proizvoljan skalar}).$$

Zamenom n u jednačini (1), a posle deobe sa λ, dobija se tražena jednačina ravni u obliku:

$$(r-r_1)\cdot(a\times b)=0.$$

Odgovarajući analitički oblik ove jednačine je

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

gde je $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$.

4.2.3. JEDNAČINA RAVNI KROZ TRI DATE TAČKE

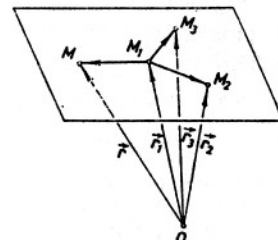
Ako su $M_1=(r_1)$, $M_2=(r_2)$, $M_3=(r_3)$ tri date tačke koje ne leže na jednoj pravoj liniji (sl. 4.2.3.1) onda one definišu jednu ravan, čija se jednačina u vektorskom obliku može izvesti na ovaj način. Uočimo, pored ove tri tačke, jednu proizvoljnu tačku $M=(r)$ u ravni. Tada, pošto sve četiri tačke M, M_1, M_2, M_3 leže u ravni, vektori $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M_3}$ su komplanarni, te je uslov njihove komplanarnosti izražen jednakošću:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0.$$

Kako je

$$\overrightarrow{M_1M}=r-r_1, \quad \overrightarrow{M_1M_2}=r_2-r_1,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=r_3-r_1,$$



Sl. 4.2.3.1.

prethodna jednakost postaje

(1) $\quad (r-r_1)\cdot((r_2-r_1)\times(r_3-r_1))=0.$

Ova jednačina predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz tri date tačke.

Do jednačine (1) može se doći polazeći od jednačine ravni kroz jednu tačku, npr. M_1;

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

gde se za normalni vektor $\boldsymbol{n}$, budući da ravan sadrži nekolinearne vektore $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ i $\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$, može uzeti

$$\boldsymbol{n}=\lambda\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=\lambda\left((\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)\right)\qquad (\lambda \text{ proizvoljni skalar})$$

na osnovu čega se poslednja jednačina svodi na jednačinu (1).

Analitički oblik jednačine ravni kroz tri date tačke dobija se iz (1) neposredno, ako se analitički izraz za mešoviti proizvod s njene leve strane izjednači s nulom, tj.

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Do jednačine (2) može se doći polazeći od jednačine ravni kroz jednu tačku

$$(3)\qquad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

izražavajući uslove da tačke M_2 i M_3 leže u ovoj ravni, tj.

$$(4)\qquad \begin{aligned} &A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,\\ &A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0. \end{aligned}$$

Za egzistenciju realnih i od nule različitih vrednosti koeficijenata A, B, C, za sistem linearnih homogenih jednačina (3) i (4) potreban i dovoljan uslov je izražen jednačinom (2), koja predstavlja analitički oblik jednačine ravni kroz tri date tačke.

4.2.4. SEGMENTNI OBLIK JEDNAČINE RAVNI

Segmentnim oblikom jednačine ravni naziva se relacija između vektora položaja proizvoljne tačke ravni i segmenata a, b, c koje ova ravan odseca na koordinatnim osama (sl. 4.2.4.1).

Kako u ovom slučaju ravan prolazi kroz tri date tačke:

$$(1)\qquad M_1=(\boldsymbol{r}_1)=(a\boldsymbol{i}),\quad M_2=(\boldsymbol{r}_2)=(b\boldsymbol{j}),\quad M_3=(\boldsymbol{r}_3)=(c\boldsymbol{k}),$$

to jednačina (1) iz 4.2.3. pre svega daje:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot\left((\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\right)=0$$

ili

$$(2)\qquad \boldsymbol{r}\cdot\left((\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\right)=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3).$$

Uzimajući u obzir (1), dobijamo:

$$(3)\qquad \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3=bc\cdot\boldsymbol{i};\quad \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=ca\cdot\boldsymbol{j};\quad \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=ab\cdot\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=abc.$$

Zamenom proizvoda (3) u (2) dobijamo

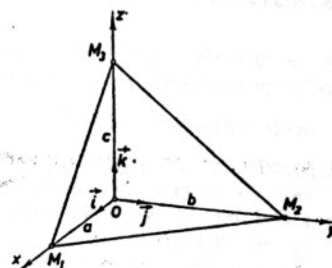
$$\boldsymbol{r}\cdot(bc\cdot\boldsymbol{i}+ca\cdot\boldsymbol{j}+ab\cdot\boldsymbol{k})=abc,$$

odakle se deobom sa abc dobija

$$(4)\qquad \boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{i}}{a}+\frac{\boldsymbol{j}}{b}+\frac{\boldsymbol{k}}{c}\right)=1$$

ili

$$(5)\qquad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}=1,\quad \boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{i}}{a}+\frac{\boldsymbol{j}}{b}+\frac{\boldsymbol{k}}{c}.$$



Sl. 4.2.4.1.

Jednakost (4) predstavlja segmentni oblik jednačine ravni. Odgovarajući analitički oblik biće

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Jednačina ravni u opštem vektorskom obliku

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}+D=0\qquad (D\neq 0)$$

deobom sa $-D$ svodi se neposredno na segmentni oblik:

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{-D}=1.$$

Kako je $\frac{\boldsymbol{n}}{-D}=\left(\frac{A}{-D},\ \frac{B}{-D},\ \frac{C}{-D}\right)$, to izjednačujući s odgovarajućim projekcijama vektora $\boldsymbol{N}$ iz (5), nalazimo

$$(6)\qquad a=-\frac{D}{A},\qquad b=-\frac{D}{B},\qquad c=-\frac{D}{C}.$$

Napomenimo da se ovde može poći od analitičkog oblika opšte jednačine ravni

$$Ax+By+Cz+D=0\qquad (D\neq 0),$$

čijom deobom sa $-D$ nalazimo neposredno

$$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1,$$

tj. za segmente na koordinatnim osama dobijamo vrednosti (6).

4.2.5. PARAMETARSKI OBLIK JEDNAČINE RAVNI

Jednačina oblika

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cdot u+\boldsymbol{b}\cdot v,$$

gde su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstantni i nekolinearni vektori, a u i v skalarni parametri, izražava, kao što je poznato iz vektorske algebre, uslov komplanarnosti vektora $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. To znači da vektor položaja $\boldsymbol{r}$ leži u ravni vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, te gornja jednačina predstavlja takođe jedan od oblika jednačine ravni. Gornja jednačina je ekvivalentna sa jednačinom:

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$$

do koje se formalno može doći skalarnim množenjem jednačine $r=au+bv$ vektorskim proizvodom $a\times b$, uzimajući pri tome u obzir da je

$$a\cdot(a\times b)=b\cdot(a\times b)=0.$$

Upoređenjem pretposlednje jednačine sa jednačinom u opštem vektorskom obliku: $rn+D=0$ lako se zaključuje da ona predstavlja ravan koja prolazi kroz pol O i ima za normalni vektor $n=a\times b$.

Ako su vektori r, a i b dati svojim projekcijama na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema:

$$r=(x,\ y,\ z);\qquad a=(a_1,\ a_2,\ a_3);\qquad b=(b_1,\ b_2,\ b_3),$$

tada će vektorskoj jednačini $r=a\cdot u+b\cdot v$ odgovarati sistem skalarnih jednačina:

$$x=a_1u+b_1v,\qquad y=a_2u+b_2v,\qquad z=a_3u+b_3v.$$

Ovo su *jednačine ravni u parametarskom obliku.* Parametri u i v nazivaju se *Gaussovim parametrima.*

ZADATAK. 1. Ispitati šta predstavlja jednačina

$$r=r_0+a\cdot u+b\cdot v,$$

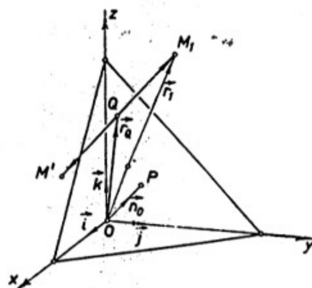
gde su a i b konstantni i nekolinearni vektori, ako konstantni vektor r_0 a) nije komplanaran sa a i b; b) ako je komplanaran sa a i b.

4.3. RASTOJANJE TAČKE OD RAVNI

Neka je data vektorska jednačina ravni u normalnom (HESSEovom) obliku:

(1) $\quad rn_0-p=0$

i jedna tačka $M_1=(r_1)$ van ravni. Treba odrediti rastojanje ove tačke od ravni (1). Tačka M_1 može da pripada ili oblasti prostora, u kojoj ne leži pol O, ili onoj oblasti u kojoj ovaj pol leži (npr. tačka M' na sl. 4.3.1). Ako je Q projekcija tačke M_1 na ravni, tada vektor $\overrightarrow{QM_1}$ ima smer jediničnog normalnog vektora n_0, a za tačku M' smer suprotan ovom vektoru.



Sl. 4.3.1.

Stoga možemo pisati

(2) $\quad \overrightarrow{QM_1}=\mu\cdot n_0,$

gde je $\mu>0$, ako se tačka M_1 i pol O nalaze u dve različite oblasti prostora odvojene ovom ravni, a $\mu<0$, ako se ove dve tačke nalaze u istoj oblasti. U oba ova slučaja je rastojanje d tačke M_1 od ravni (1) modul vektora $\overrightarrow{QM_1}$, tj. prema (2) je

(3) $\quad d=|\overrightarrow{QM_1}|=|\mu n_0|=|\mu|.$

Kako tačka $Q=(r_Q)$ leži u ravni (1), vektor r_Q mora zadovoljavati jednačinu ove ravni, tj. mora biti:

(4) $\quad r_Q\cdot n_0-p=0.$

Iz slike proizilazi

$$r_1=r_Q+\overrightarrow{QM_1},\qquad r_1=r_Q+\mu n_0,$$

(5) $\quad r_Q=r_1-\mu n_0.$

Zamenom vektora r_Q iz (5) u (4) dobijamo:

$$(r_1-\mu n_0)\cdot n_0-p=0$$

ili

$$r_1n_0-\mu-p=0\qquad (n_0n_0=1),$$

a odavde definitivno proizilazi

(6) $\quad \mu=r_1n_0-p.$

Rastojanje tačke $M_1=(r_1)$ od ravni (1) prema (3) je:

(7) $\quad d=|r_1n_0-p|.$

Iz jednakosti (6) se vidi da se skalarni činilac μ dobija iz jednačine (1), kada se na njenoj levoj strani vektor r zameni vektorom r_1. Rezultat ove zamene može biti pozitivan ($\mu>0$) ili negativan ($\mu<0$), što zavisi od toga da li se tačke M_1 i O nalaze u različitim oblastima ili u istoj oblasti. U oba slučaja rastojanje tačke M_1 od ravni je $d=|\mu|$.

Analitički oblici jednakosti (6) i (7) su:

$$\mu=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p,$$
$$d=|\mu|=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|,$$

gde su $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ projekcije jediničnog normalnog vektora n_0, tj. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Ako je jednačina ravni data u opštem vektorskom obliku

$$rn+D=0,$$

tada je njoj odgovarajući normalni oblik:

(8) $\quad \dfrac{rn+D}{\pm n}=0.$

Jednakost (6) za činilac μ ima prema (8) oblik

(9) $\quad \mu=\dfrac{r_1n+D}{\pm n},$

a jednakost (7) za rastojanje tačke $M_1=(r_1)$ od ravni $rn+D=0$ ima oblik

(10) $\quad d=\left|\dfrac{r_1n+D}{\pm n}\right|.$

Za analitički oblik opšte jednačine ravni

$$Ax+By+Cz+D=0$$

jednakosti (9) i (10) su respektivno oblika:

$$\mu=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm(A^2+B^2+C^2)^{1/2}};\qquad d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm(A^2+B^2+C^2)^{1/2}}\right|.$$

ZADATAK 1. Odrediti rastojanje δ između dve paralelne ravni zadate, npr. vektorskim jednačinama normalnog oblika: $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 - p_1 = 0$, $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 - p_2 = 0$.

Rezultat. $\delta = |p_1 - p_2|$.

4.4. UGAO IZMEĐU DVE RAVNI

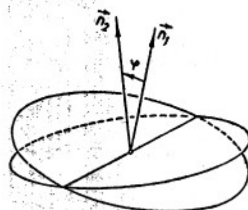
Ako su jednačine dveju ravni date u opštem vektorskom obliku

(1) $\qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0,$

tada $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ označavaju normalne vektore prve odnosno druge ravni.

Pod uglom φ između dve ravni (1) (sl. 4.4.1) podrazumeva se ugao koji zaklapaju odgovarajući normalni vektori, tj. $\varphi = \sphericalangle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)$. Kako je po definiciji skalarnog proizvoda

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = n_1 n_2 \cos\varphi,$$



Sl. 4.4.1.

to se za oštar ugao φ između vektora $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ dobija

(2) $$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{n}_2|}{n_1 n_2}$$

Kada su ravni (1) ortogonalne jedna na drugoj, tada su i normalni vektori $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ ortogonalni, tj. $\varphi = \pi/2$, $\cos\varphi = 0$, pa je prema (2) *uslov ortogonalnosti* dveju ravni izražen relacijom:

(3) $\qquad \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0.$

Ako su ravni (1) paralelne, tada su njima odgovarajući normalni vektori $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ kolinearni, te se *uslov paralelnosti* dveju ravni može izraziti relacijom

(4) $\qquad \boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2 \quad (\lambda \text{ skalar}),$

ili u obliku:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = 0.$$

Ako su ravni (1) zadate odgovarajućim analitičkim izrazima:

(5) $\qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$

tada je prema (2) kosinus oštrog ugla između ovih ravni dat relacijom:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{1/2} (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)^{1/2}}.$$

Analitički oblik uslova ortogonalnosti ravni (5) prema (3) je

(6) $\qquad A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0,$

a analitički oblik uslova paralelnosti je prema (4)

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2,$$

ili

(7) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Primetimo da uslov ortogonalnosti (6) predstavlja jednu jednakost, dok je uslov paralelnosti (7) izražen dvema jednakostima među koeficijentima A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$.

ZADATAK 1. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_1 = (\boldsymbol{r}_1)$, a paralelna je datoj ravni $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0$.

Rešenje. Kako tražena ravan prolazi kroz tačku M_1, njena jednačina će biti:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Normalni vektor $\boldsymbol{n}$ može se odrediti iz uslova (4) paralelnosti tražene sa datom ravni, tj. iz

$$\boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}_1.$$

Zamenom $\boldsymbol{n}$ u prethodnoj relaciji dobija se jednačina ravni u obliku

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0.$$

Njoj odgovarajući analitički oblik je:

$$A_1 (x - x_1) + B_1 (y - y_1) + C_1 (z - z_1) = 0,$$

gde su (A_1, B_1, C_1) projekcije normalnog vektora $\boldsymbol{n}_1$ date ravni na koordinatne ose.

ZADATAK 2. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_1 = (\boldsymbol{r}_1)$, a ortogonalna je na dvema datim ravnima: $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0$ i $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0$.

Rešenje. Kako tražena ravan prolazi kroz datu tačku M_1, to je njena jednačina oblika:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Kako je ova ravan, po uslovu zadatka, upravna na obema datim ravnima, to ona mora biti paralelna sa normalnim vektorima $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ ovih ravni, pa je stoga njen normalni vektor $\boldsymbol{n}$ dat relacijom:

$$\boldsymbol{n} = k \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) \qquad (k \text{ proizvoljni skalar}).$$

Zamenom $\boldsymbol{n}$ u gornjoj relaciji dolazi se do tražene jednačine ravni (posle skraćivanja sa k):

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) = 0.$$

Odgovarajući analitički oblik ove jednačine je:

(1) $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Do poslednjeg oblika može se doći i analitičkim putem. Uslov da tražena ravan $Ax + By + Cz + D = 0$ prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i da je upravna na ravnima $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ izraženi su sledećim jednakostima:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0, \quad AA_2 + BB_2 + CC_2 = 0.$$

Ovaj sistem linearnih homogenih jednačina po A, B, C će imati rešenja različita od nule ako je

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

a ova jednačina predstavlja jednačinu tražene ravni identičnu sa jednačinom (1).

4.5. JEDNAČINA PRAMENA RAVNI

Neka su dve ravni date jednačinama opšteg vektorskog oblika:

(1) $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0.$

Ako normalni vektori $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ nisu kolinearni, tj. ravni nisu paralelne, one će se seći i kroz liniju njihovog preseka može se povući jedna familija ravni. Pod pramenom ravni podrazumeva se skup ravni koje prolaze kroz liniju preseka ravni (1).

Ako je $M=(\boldsymbol{r})$ jedna proizvoljna tačka na liniji preseka ravni (1), tada će vektor položaja $\boldsymbol{r}$ ove tačke zadovoljavati jednačine (1), a isto tako zadovoljavaće i jednačinu

(2) $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 + \lambda(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2) = 0,$

gde je λ proizvoljan realni skalar koji varira u intervalu $-\infty<\lambda<+\infty$. Prema tome, jednačina (2) predstavljaće jednačinu traženog pramena ravni (1). U njoj figuriše jedan parametar λ, te je u problemima ove vrste za njegovo određivanje potrebno poznavanje jednog uslova — jedne jednakosti, iz koje se može odrediti ovaj parametar. Jednačina (2) može se napisati i u obliku

(3) $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{n}_1 + \lambda\boldsymbol{n}_2) + (D_1 + \lambda D_2) = 0.$

Odgovarajući analitički oblik jednačine pramena ravni je:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

odnosno

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0.$$

ZADATAK 1. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz presek ravni $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0$ i $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0$ i kroz pol O $(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 \neq 0)$.

Rešenje. Kako ova ravan prolazi kros pol O, to jednačinu (3) mora zadovoljiti vektor $\boldsymbol{r}=0$, te je otuda $D_1 + \lambda D_2 = 0$, odakle je $\lambda = \dfrac{-D_1}{D_2}$. Jednačina tražene ravni je

$$\boldsymbol{r}\cdot\left(\boldsymbol{n}_1 - \frac{D_1}{D_2}\boldsymbol{n}_2\right) = 0.$$

ZADATAK 2. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz liniju preseka ravni $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0$ i $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0$, a upravna je na datoj ravni $\boldsymbol{r}\boldsymbol{N} + D = 0$.

Rešenje. Iz skupa ravni (3) treba odrediti onu ravan, čiji je normalni vektor $\boldsymbol{n}_1 + \lambda\boldsymbol{n}_2$ upravan na vektoru $\boldsymbol{N}$, tj.

$$(\boldsymbol{n}_1 + \lambda\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{N} = 0.$$

Odavde je $\lambda = -\dfrac{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{N}}$, pa je jednačina tražene ravni

$$(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{N})\cdot(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1) = (\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{N})\cdot(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2).$$

4.6. NEKI OSNOVNI ZADACI

ZADATAK 1. Odrediti presečnu tačku triju ravni.

Rešenje. Neka su tri ravni date jednačinama

(1) $\boldsymbol{r}\boldsymbol{a} = \alpha, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{b} = \beta, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{c} = \gamma.$

Množeći prvu jednačinu sa β, a drugu sa $-\alpha$ i sabirajući ih, dobijamo

(2) $\boldsymbol{r}\cdot(\beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}) = 0$

a zatim, množeći drugu od jednačina (1) sa γ, a treću sa $-\beta$ i sabirajući ih dobijamo

(3) $\boldsymbol{r}\cdot(\gamma\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{c}) = 0.$

Iz relacije (2) proizilazi da je vektor $\boldsymbol{r}$ upravan na vektoru $\beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$, a iz (3) proizilazi da je vektor $\boldsymbol{r}$ upravan na vektoru $\gamma\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{c}$, što znači da je $\boldsymbol{r}$ kolinearan sa vektorskim proizvodom vektora $\beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$ i $\gamma\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{c}$, tj.

$$\boldsymbol{r} = \lambda\cdot((\beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b})\times(\gamma\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{c})) \qquad (\lambda \text{ skalarni parametar}).$$

Odavde se, posle izvršenog vektorskog množenja i svih uprošćenja, dobija

(4) $\boldsymbol{r} = \lambda\beta\left(\gamma\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \alpha(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \times \beta\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\right).$

U jednačini (4) treba još odrediti vrednost skalarnog parametra λ.
U tom cilju pomnožimo skalarno poslednju relaciju vektorom $\boldsymbol{b}$:

(5) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b} = \lambda\beta\left(\gamma\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \alpha\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \beta\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\right).$

Imajući u vidu da je

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = 0,$$

a prema drugoj od jednačina (1) $\boldsymbol{r}\boldsymbol{b} = \beta$, relacija (5) se svodi na

$$\beta = \lambda\beta^2\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

Odavde je

$$\lambda = \frac{1}{\beta\cdot(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))} = \frac{1}{\beta((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c})}.$$

Zamenom ove vrednosti za λ u (4) dobija se vektor položaja tačke preseka ravni (1) u obliku:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\alpha(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}.$$

Analitički put za rešenje ovoga problema svodi se na rešavanje sistema linearnih jednačina

$$a_1x + a_2y + a_3z = \alpha, \quad b_1x + b_2y + b_3z = \beta, \quad c_1x + c_2y + c_3z = \gamma.$$

Ostavlja se čitaocu da geometrijski interpretira slučajeve koji mogu nastupiti pri rešavanju ovoga sistema jednačina.

ZADATAK 2. Naći vektor položaja podnožja normale spuštene iz pola na ravan:

$$a)\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 - p = 0; \qquad b)\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n} + D = 0.$$

Rešenje. Za normalni oblik jednačine ravni je očigledno ovaj vektor $\boldsymbol{r}_0 = p\boldsymbol{n}_0$. Za ravan sa jednačinom: $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n} + D = 0$ je odgovarajući normalni oblik: $\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{n}_0 + \dfrac{D}{\pm n} = 0$ ($\boldsymbol{n}_0 = \text{ort}\,\boldsymbol{n}$), te je traženi vektor

$$\boldsymbol{r}_0 = -\frac{D}{\pm n}\boldsymbol{n}_0 = -\frac{D}{\pm n}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{n} = \mp\frac{D}{n^2}\cdot\boldsymbol{n}.$$

ZADATAK 3. Znajući vektor položaja $\boldsymbol{r}_0$ podnožja normale spuštene iz pola O na ravan napisati jednačinu ove ravni.

Rešenje. Tražena ravan prolazi kroz tačku $M_0 = (\boldsymbol{r}_0)$, njen normalni vektor je kolinearan sa $\boldsymbol{r}_0$, tj. $\boldsymbol{n} = k\cdot\boldsymbol{r}_0$ (k proizvoljni skalar različit od nule). Stoga je njena jednačina

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot k\boldsymbol{r}_0 = 0 \quad \text{ili} \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}_0 = 0.$$

ZADATAK 4. Kroz pol O povući ravan paralelnu vektoru $\boldsymbol{a}$ i upravnu na ravni $\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}=\beta$.

Rešenje. Jednačina ravni koja prolazi kroz pol O ima oblik: $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}=0$. Vektor $\boldsymbol{a}$ i normalni vektor $\boldsymbol{b}$ date ravni $\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}=\beta$ paralelni su traženoj ravni. Stoga je normalni vektor $\boldsymbol{n}$ ove poslednje ravni $\boldsymbol{n}=k\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, a njena jednačina je $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$.

ZADATAK 5. Sastaviti vektorsku jednačinu ravni koja prolazi kroz dve date tačke $M_1=(\boldsymbol{r}_1)$ i $M_2=(\boldsymbol{r}_2)$, a paralelna je sa datim vektorom $\boldsymbol{a}$.

Rešenje. Tražena jednačina će imati oblik $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0$. Kako tačke M_1 i M_2 leže u ovoj ravni, to i vektor $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ leži u njoj te je ova ravan paralelna vektorima $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{a}$. Zato se može uzeti $\boldsymbol{n}=k\cdot((\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a})$ te će tražena jednačina ravni biti

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot((\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a})=0.$$

Zadaci za rešavanje

M I, Analitička geometrija u prostoru: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15.

5. PRAVA

5.1. KRIVE U PROSTORU

Kriva u prostoru može biti definisana linijom preseka dve površine. Stoga se analitički ona može definisati skupom od dve relacije između tekućih koordinata tačke na krivoj, od kojih svaka ponaosob predstavlja jednu od površina koje svojim presekom definišu liniju.

Prema tome jednačine krive u prostoru mogu biti definisane skupom jednakosti oblika:

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0,$$

ili

$$z=f_1(x, y), \quad z=f_2(x, y),$$

ili

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Poslednji skup jednakosti predstavlja ***parametarske jednačine krive*** u prostoru. On može biti zamenjen i jednom vektorskom jednačinom

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),$$

gde je $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\cdot\boldsymbol{i}+y(t)\cdot\boldsymbol{j}+z(t)\cdot\boldsymbol{k}$. Poslednji oblik nalazi naročito primenu u mehanici, gde parametar t označava vreme. Napomenimo da vektorska jednačina $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ definiše geometrijsko mesto krajeva vektora $\boldsymbol{r}(t)$, koji zavisi od skalarnog argumenta t. Ovo geometrijsko mesto—kriva u prostoru, naziva se u vektorskoj analizi ***hodograf*** vektorske funkcije $\boldsymbol{r}(t)$.

ZADATAK 1. Dokazati da hodograf vektorske funkcije

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot t+\boldsymbol{c}\cdot t^2$$

($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nekomplanarni vektori) predstavlja krivu koja leži u jednoj ravni koju treba odrediti.

Rešenje. Skalarnim množenjem gornje jednačine sa $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ nalazimo

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

tj. vektor položaja proizvoljne tačke na krivoj zadovoljava jednačinu ove ravni. Kriva leži u toj ravni.

5.2. PRAVA KAO LINIJA PRESEKA DVE RAVNI

Na osnovu geometrijske činjenice da prava predstavlja liniju preseka dve ravni, a prema opštoj napred učinjenoj napomeni, jednačine prave se mogu predstaviti skupom jednačina tih dveju ravni:

(1) $\quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1+D_1=0, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2+D_2=0.$

Međutim, svaki drugi par ravni, tj. skup jednačina

$$rn_1' + D_1' = 0, \quad rn_2' + D_2' = 0,$$

koji prolazi kroz liniju preseka ravni (1), predstavlja takođe jednačine ove prave. Možemo izvesti ovaj zaključak.

Makoji par ravni iz pramena

$$(2) \qquad rn_1 + D_1 + \lambda(rn_2 + D_2) = 0$$

definiše jednu te istu pravu u prostoru, a jednačine ove linije biće predstavljene odgovarajućim skupom dve jednačine dobijene iz relacije (2). Ove jednačine predstavljaju *opšti vektorski oblik* jednačine prave u prostoru.

Analitički se jednačine prave, prema (1), uopšte mogu predstaviti skupom jednačina:

$$(3) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

odnosno jednačine jedne te iste prave mogu se definisati skupom makoje dve jednačine iz pramena

$$(4) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0.$$

PRIMER 1. Jednačine koordinatnih osa su: $x=0$, $y=0$ (osa OZ); $y=0$, $z=0$ (osa OX) i $z=0$, $x=0$ (osa OY).

U specijalnom slučaju može se iz sistema jednačina (3), posle eliminacije najpre ordinate y, a zatim apscise x, dobiti skup jednačina u obliku

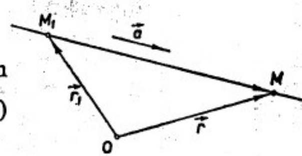
$$(5) \qquad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Ovaj skup pripada pramenu ravni (4), jer se do prve od jednačina (5) dolazi za vrednost λ određenu iz uslovne jednačine $B_1 + \lambda B_2 = 0$, a do druge za vrednost λ određenu iz relacije $A_1 + \lambda A_2 = 0$. Kako je prva od ravni (5) upravna na ravni XOZ, a druga na ravni YOZ, to iz ovog proizilazi da jednačine (5) definišu pravu u prostoru *projekcijama ove prave na dve koordinatne ravni*.

5.3. JEDNAČINE PRAVE KROZ JEDNU DATU TAČKU PARALELNE DATOM VEKTORU

Prava u prostoru je određena ako je poznata tačka $M_1 = (r_1)$ kroz koju ona prolazi i vektor a kome je paralelna. Njena vektorska jednačina daje vezu između vektora r proizvoljne tačke na pravoj, vektora r_1 date tačke M_1 i vektora a. Iz slike 5.3.1 neposredno proizilazi veza:

$$(1) \qquad r = r_1 + \overrightarrow{M_1M}.$$



Sl. 5.3.1.

Kako je vektor $\overrightarrow{M_1M}$ kolinearan sa vektorom a to je $\overrightarrow{M_1M} = \lambda a$ (λ skalar), pa jednačina (1) dobija oblik:

$$(2) \qquad r = r_1 + \lambda a.$$

Ako se umesto vektora a posmatra odgovarajući jedinični vektor a_0, jednačina (2) će imati oblik:

$$(3) \qquad r = r_1 + \mu a_0 \quad (\mu \text{ skalar})$$

Jednačina (2) odnosno (3) predstavlja *jednačinu prave kroz datu tačku u vektorskom obliku*.

Iz jednačine (2) proizilazi:

$$(4) \qquad r - r_1 = \lambda a$$

koja izražava uslov kolinearnosti vektora $r - r_1 = \overrightarrow{M_1M}$ i a. Zato (4) možemo pisati i u obliku

$$(r - r_1) \times a = 0 \quad \text{ili} \quad r \times a = r_1 \times a.$$

Ako su vektori r, r_1 i a dati svojim projekcijama: $r = (x, y, z)$, $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $a = (l, m, n)$, tada vektorskoj jednačini (2) prave odgovaraju ove tri skalarne:

$$(5) \qquad x = x_1 + \lambda l, \quad y = y_1 + \lambda m, \quad z = z_1 + \lambda n.$$

Ove jednačine predstavljaju tzv. *parametarski oblik jednačina prave*. Parametarski oblik jednačina prave, koji odgovara vektorskoj jednačini (3) je

$$(6) \qquad x = x_1 + \mu \cos\alpha, \quad y = y_1 + \mu \cos\beta, \quad z = z_1 + \mu \cos\gamma,$$

gde je $a_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Iz jednačina (5) odnosno (6) može se eliminacijom parametra λ odnosno μ dobiti tzv. *simetrični oblik* jednačina prave:

$$(7) \qquad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

odnosno

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Odavde je $a_0 = \dfrac{a}{a}$ pa je

$$\cos\alpha = \frac{l}{a}, \quad \cos\beta = \frac{m}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{a}, \quad a = (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2},$$

gde $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ predstavljaju kosinuse uglova koje prava zaklapa sa koordinatnim osama.

Primetimo da se jednačina prave zadata u vektorskom obliku $(r - r_1) \times a = 0$ može svesti neposredno na simetrični oblik (7) imajući u vidu da je kolinearnost vektora $r - r_1$ i a izražena proporcionalnošću njihovih odgovarajućih projekcija, a ova proporcionalnost je upravo i izražena jednačinama (7).

5.4. JEDNAČINE PRAVE KROZ DVE DATE TAČKE

Prava je određena dvema tačkama $M_1 = (r_1)$ i $M_2 = (r_2)$. Do vektorskog oblika jednačine ove prave može se doći polazeći od vektorskog oblika jednačine prave koja prolazi kroz jednu tačku $r = r_1 + \mu a$. U ovoj jednačini potrebno je odrediti još vektor a. Iz slike proizilazi

$$\overrightarrow{M_1M_2} = r_2 - r_1,$$

pa se za vektor $\boldsymbol{a}$, kome je prava paralelna, može uzeti proizvoljan vektor kolinearan sa $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, tj. $\boldsymbol{a}=k\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=k\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$, gde je k proizvoljni skalar. Zamenom $\boldsymbol{a}$ u jednačini $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{a}$ dobija se vektorski oblik jednačine prave koja prolazi kroz dve tačke:

(1) $\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$

Ova vektorska jednačina može se napisati i u obliku

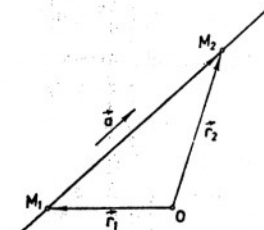
(2) $\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{0}$

i izražava kolinearnost vektora $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ i $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$

Napomenimo da, s obzirom na to da se tačke $M=(\boldsymbol{r})$, $M_1=(\boldsymbol{r}_1)$ i $M_2=(\boldsymbol{r}_2)$ nalaze na jednoj pravoj, vektori $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ i $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$ moraju biti kolinearni, te se na taj način neposredno dolazi do vektorskog oblika (2) jednačine prave koja prolazi kroz dve date tačke, a iz ovog oblika proizilazi oblik (1).

Vektorskoj jednačini (2) možemo dati i ovaj oblik:

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2.$$



Sl. 5.4.1.

Iz vektorskog oblika (1) jednačine prave dobijaju se jednačine ove prave u parametarskom obliku:

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1),\quad y=y_1+\lambda(y_2-y_1),\quad z=z_1+\lambda(z_2-z_1),$$

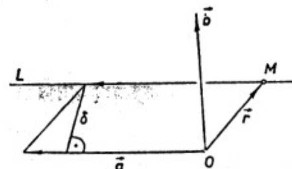
a iz ovoga se eliminacijom parametra λ dobija analitički — simetrični oblik jednačina prave kroz dve date tačke:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5.5. GEOMETRIJSKO TUMAČENJE JEDNAČINE OBLIKA $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

Ako se kod vektorskog proizvoda dva vektora $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ postavi pitanje mogućnosti jednoznačnog određivanja jednog od činilaca npr. $\boldsymbol{r}$ iz poznatog vektorskog proizvoda $\boldsymbol{b}$ i poznatog drugog činioca $\boldsymbol{a}$, tada se dolazi do sledećeg zaključka.

Konstruišimo vektor $\boldsymbol{a}$ u polu O; tačka $M=(\boldsymbol{r})$ mora imati takav položaj u prostoru da vektorski proizvod $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$ ima pravac i smer poznatog vektora $\boldsymbol{b}$, dok njegov modul mora biti jednak b. Međutim, ovaj modul će imati ovu vrednost za sve položaje tačke M na jednoj pravoj koja je paralelna vektoru $\boldsymbol{a}$, a čije se rastojanje δ (visina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{a}$) određuje iz uslova da je ova površina konstantna i jednaka b, tj. iz uslova $a\cdot\delta=b$.



Sl. 5.5.1.

Znači, vektorska relacija $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ne određuje jednoznačno vektor $\boldsymbol{r}$ iz poznatih vrednosti vektora $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{a}$, već definiše geometrijsko mesto krajeva vektora $\boldsymbol{r}$ — pravu paralelnu vektoru $\boldsymbol{a}$, a čije je rastojanje od nosača ovog vektora odnosno pola O jednako b/a.

5.6. SVOĐENJE RAZNIH VEKTORSKIH OBLIKA JEDNAČINA PRAVE JEDAN NA DRUGI

1. Poznato je da se vektorska jednačina prave koja prolazi kroz jednu tačku

(1) $\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$

može prikazati u obliku

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

ili

(2) $\quad \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{a}.$

Na taj način jednačina (1) je svedena na oblik (2), tj. na oblik

(3) $\quad \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\qquad(\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{a}).$

Obrnuto, jednačina (3) može se dovesti na oblik (1) ako se vektorski identitet $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ pomnoži vektorski jednačinom (3)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Odavde proizilazi

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

tj.

(4) $\quad \boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{a^2}+\dfrac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})}{a^2}\cdot\boldsymbol{a}.$

Ako se ovde uzme da je $\dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}}{a^2}=\lambda$, to će λ predstavljati promenljivi parametar[1], pa će jednačina (4) dobiti oblik:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{a^2}+\lambda\boldsymbol{a},$$

a ovo je jednačina oblika (1). Vektor $\boldsymbol{r}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{a^2}$ predstavlja vektor položaja jedne određene tačke kroz koju prolazi prava (3).

2. Ako je prava data skupom od dve jednačine oblika:

(5) $\quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1+D_1=0,\quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2+D_2=0,$

tada se ovaj skup jednačina može svesti na jednačinu oblika $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$ na ovaj način. Pomnožimo li prvu od jednačina (5) vektorom $\boldsymbol{n}_2$, a drugu sa $-\boldsymbol{n}_1$ i saberemo li tako dobijene relacije, imaćemo:

$$\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2)-\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1)=D_1\boldsymbol{n}_2-D_2\boldsymbol{n}_1.$$

[1] Znači da množenje vektorskim identitetom $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ vektorske relacije (3) ne dovodi do jednoznačnog određivanja vektora $\boldsymbol{r}$.

Leva strana poslednje relacije predstavlja razvijeni oblik dvostrukog vektorskog proizvoda $\mathbf{r}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)$, te je zato

(6) $\quad \mathbf{r}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)=D_1\mathbf{n}_2-D_2\mathbf{n}_1.$

Jednačina (6) je oblika $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$, gde je

$$\mathbf{a}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2,\quad \mathbf{b}=D_1\mathbf{n}_2-D_2\mathbf{n}_1.$$

Sa oblika (6) prelazi se neposredno na oblik (4):

$$\mathbf{r}=\frac{(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\times(D_1\mathbf{n}_2-D_2\mathbf{n}_1)}{|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2|^2}+\lambda(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2),$$

tj. na oblik $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}$, pri čemu je

(7) $$\mathbf{r}_1=\frac{(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\times(D_1\mathbf{n}_2-D_2\mathbf{n}_1)}{|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2|^2}\qquad(\mathbf{a}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2).$$

Na taj način moguće je ne samo prelaziti sa jednog vektorskog oblika jednačine prave u prostoru na drugi, već je moguće vršiti takve prelaze i kod analitičkih oblika, kao i prelaze sa jednog vektorskog na proizvoljni analitički oblik.

Napomenimo da se postupak kod ovih prelaza može u mnogim slučajevima i uprostiti.

Zadatak 1. Svesti jednačine $x-y+z+2=0$, $x-y-z+1=0$ na simetrični oblik.

Rešenje. Ovde je

$$\mathbf{n}_1=(1,\,-1,\,1),\quad \mathbf{n}_2=(1,\,-1,\,-1),\quad \mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}=\mathbf{a}.$$

Umesto da se odredi vektor $\mathbf{r}_1$ prema prvoj od relacija (7), jednostavnije je odrediti makoju tačku kroz koju prolazi data prava. Na primer, stavljajući u sistem jednačina prave $x_1=0$, dobija se $y_1=3/2$, $z_1=-1/2$, te se vektorska jednačina oblika $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}$ može napisati:

$$\mathbf{r}=\left(\frac{3}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)+\lambda(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}),$$

a odavde i traženi simetrični oblik jednačina prave:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{2}=\frac{z+\frac{1}{2}}{0}.$$

5.7. UGAO IZMEĐU DVE PRAVE

Neka su dve prave u prostoru date jednačinama:

(1) $\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda_1\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\lambda_2\mathbf{a}_2.$

Pod uglom između ove dve prave podrazumeva se ugao između vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ kojima su ove prave paralelne, tj.

$$\varphi=\measuredangle(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2).$$

Na osnovu definicije neposredno proizilazi za oštar ugao φ:

(2) $$\cos\varphi=\frac{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}{a_1a_2}$$

Ako su prave (1) paralelne, tada su vektori $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ kolinearni, pa je *uslov paralelnosti* dveju pravih u prostoru:

(3) $\quad \mathbf{a}_1=\lambda\mathbf{a}_2$ ili $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=0.$

Ako su prave (1) upravne, tada je $\varphi=\measuredangle(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$, pa je *uslov upravnosti* ovih pravih izražen jednakošću

(4) $\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=0.$

Kad se vektori $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ izraze svojim projekcijama $\mathbf{a}_1=(l_1,\,m_1,\,n_1)$, $\mathbf{a}_2=(l_2,\,m_2,\,n_2)$ tada analitički izraz za $\cos\varphi$, prema (2), ima oblik:

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)^{1/2}(l_2^2+m_2^2+n_2^2)^{1/2}}.$$

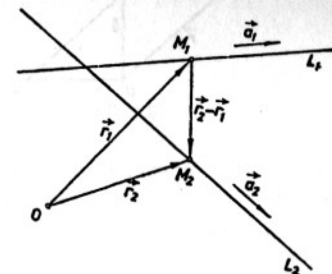
Uslov paralelnosti, prema (3), je $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$, a uslov upravnosti, prema (4), je $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

5.8. USLOV PRESEKA DVE PRAVE

Dve prave koje se seku određuju jednu ravan. Prema tome, zadatak da se nađe uslov preseka dveju pravih ekvivalentan je zadatku da se nađe uslov da ove dve prave leže u jednoj ravni.

Ako se dve prave seku (leže u jednoj ravni), tada su vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ (sl. 5.8.1) komplanarni, pa je traženi uslov preseka ovih pravih:

(1) $\quad (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0.$



Sl. 5.8.1.

Imajući u vidu da su projekcije činilaca u ovom mešovitom proizvodu:

$$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=((x_2-x_1),\ (y_2-y_1),\ (z_2-z_1))$$

$$\mathbf{a}_1=(l_1,\,m_1,\,n_1),\quad \mathbf{a}_2=(l_2,\,m_2,\,n_2),$$

analitički izraz za uslov preseka dveju pravih, prema (1), može se predstaviti ovom jednakošću:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

5.9. NEKI OSNOVNI ZADACI

Zadatak 1. Odrediti rastojanje pola do date prave.

Rešenje. Ako je jednačina prave data u obliku

(1) $\quad \mathbf{r}\times\mathbf{a}_0=\mathbf{B}\quad(|\mathbf{a}_0|=1),$

tada se njeno rastojanje δ od pola O može odrediti na ovaj način.

Površina paralelograma $OMPQ$ (videti sliku 5.9.1) predstavlja modul vektorskog proizvoda $r\times a_0 = B$ pa je

$$|r\times a_0| = |B|,$$

a s druge strane je

$$|r\times a_0| = a_0 r \sin\measuredangle(r, a_0) = a_0\cdot\delta = \delta \qquad (a_0 = 1).$$

Odavde neposredno proizilazi da je traženo rastojanje

(2) $$\delta = |B|.$$

Ako je jednačina prave data u obliku

(3) $$r\times a = b,$$

tada deobom sa a, dobijamo:

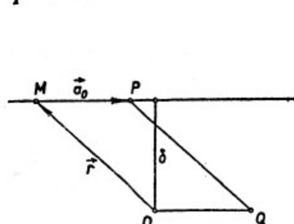
$$r\times a_0 = b/a \qquad (a_0 = a/a),$$

pa je rastojanje prave (3) od pola O dato prema (2), jednakošću $\delta = |b|/a$.

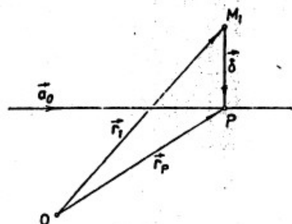
ZADATAK 2. Odrediti rastojanje tačke od prave.

Rešenje. Da bismo odredili rastojanje date tačke $M_1 = (r_1)$ od date prave, čija je jednačina data sa (1) možemo postupiti na ovaj način. Iz slike 5.9.2 proizilazi

(4) $$r_P = r_1 + \vec{\delta},$$



Sl. 5.9.1.



Sl. 5.9.2.

gde je r_P vektor položaja tačke P — projekcije tačke M_1 na datu pravu, a $\vec{\delta} = \overrightarrow{M_1P}$ vektor upravan na pravu. Kako tačka P leži na pravoj, to mora postojati relacija

$$r_P\times a_0 = B,$$

ili prema (4)

$$(r_1 + \vec{\delta})\times a_0 = B$$

ili

$$(r_1\times a_0) + (\vec{\delta}\times a_0) = B.$$

Odavde je

$$|a_0\times\vec{\delta}| = |(r_1\times a_0) - B|.$$

Kako je

$$|a_0\times\vec{\delta}| = a_0\,\delta \sin\measuredangle(a_0, \vec{\delta}) = \delta,$$

gde je δ traženo rastojanje date tačke od prave, to prema prethodnoj jednakosti imamo:

(5) $$\delta = |r_1\times a_0 - B|.$$

Vidi se da se ovo rastojanje dobija kad se uzme modul leve strane jednačine prave $r\times a_0 - B = 0$, u kojoj je vektor r smenjen vektorom položaja r_1 tačke M_1.

Ako je jednačina prave data u obliku:

$$r\times a = b \qquad (a\neq 0),$$

tada je rastojanje tačke $M_1 = (r_1)$ od ove prave:

$$\delta = \left| r_1\times\frac{a}{a} - \frac{b}{a}\right|.$$

Za pravu datu jednačinom

$$(r - r_0)\times a = 0$$

je

$$\delta = |(r_1 - r_0)\times a|/a.$$

ZADATAK 3. Izvesti obrazac za rastojanje dveju paralelnih pravih.

Rešenje. Ako su dve prave paralelne, njihove vektorske jednačine će biti oblika

(6) $$(L_1)\quad r\times a_0 = B_1, \qquad (L_2)\quad r\times a_0 = B_2 \qquad (a_0 = 1).$$

Označimo sa $\overline{PQ} = \delta$ odsečak normale između ovih pravih; tada ovaj odsečak predstavlja traženo rastojanje između pravih (L_1) i (L_2). Prema oznakama na slici 5.9.3, a imajući u vidu da tačka P leži na (L_1), a Q na (L_2), imamo

(7) $$r_P\times a_0 = B_1, \qquad r_Q\times a_0 = B_2.$$

Iz slike dalje proizilazi

$$r_Q = r_P + \overrightarrow{PQ} = r_P + \vec{\delta}.$$

Zamenom ove vrednosti za r_Q u drugu od jednakosti (7) dobijamo

$$(r_P\times a_0) + (\vec{\delta}\times a_0) = B_2,$$

ili na osnovu prve jednakosti (7):

$$B_1 + (\vec{\delta}\times a_0) = B_2.$$

Odavde je

(8) $$|a_0\times\vec{\delta}| = |B_1 - B_2|.$$

Kako je

$$|a_0\times\vec{\delta}| = a_0\,\delta\sin\pi/2 = \delta,$$

to za rastojanje između paralelnih pravih (7) dobijamo prema (8)

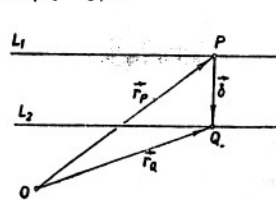
$$\delta = |B_1 - B_2|.$$

Ako su jednačine paralelnih pravih date u obliku

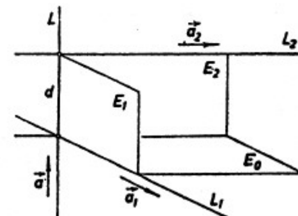
(9) $$r\times a = b_1, \quad r\times a = b_2 \quad (a\neq 1),$$

tada se deljenjem svake od njih sa a zadatak svodi na prethodni $(a/a = a_0)$, tako da obrazac za rastojanje pravih (9) možemo pisati:

$$\delta = |b_1 - b_2|/a.$$



Sl. 5.9.3.



Sl. 5.9.4.

ZADATAK 4. Za dve date prave napisati jednačinu zajedničke normale i izvesti obrazac za najkraće rastojanje.

Rešenje. Navešćemo ukratko geometrijski postupak za konstrukciju zajedničke normale na dve mimoilazne prave (L_1) i (L_2):

(10) $\quad (L_1)\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda_1\mathbf{a}_1;\qquad (L_2)\quad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2+\lambda_2\mathbf{a}_2.$

Treba kroz pravu (L_1) povući ravan E_0 paralelno pravoj (L_2), zatim ravan E_1 kroz (L_1) i ravan E_2 kroz (L_2) koje su upravne na ravni E_0. Ravni E_1 i E_2 svojim presekom definišu *zajedničku normalu* na prave (L_1) i (L_2) (videti sliku 5.9.4).

Vektor $\mathbf{a}$ kome je paralelna ova zajednička normala (L) dat je relacijom:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2.$$

Ravan E_1 prolazi kroz tačku $M_1=(\mathbf{r}_1)$ na pravoj (L_1) i paralelna je vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}_1$, te ima za normalni vektor $\mathbf{n}_1=\mathbf{a}\times\mathbf{a}_1=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\times\mathbf{a}_1$, a njena jednačina je

$(E_1)\quad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot\{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\times\mathbf{a}_1\}=0.$

Isto tako ravan E_2 prolazi kroz tačku $M_2=(\mathbf{r}_2)$ na pravoj (L_2) i paralelna je vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}_2$, pa je njen normalni vektor $\mathbf{n}_2=\mathbf{a}\times\mathbf{a}_2=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\times\mathbf{a}_2$. Jednačina ove ravni je

$(E_2)\quad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\cdot\{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\times\mathbf{a}_2\}=0.$

Skup jednačina (E_1) i (E_2) predstavlja *jednačine zajedničke normale* pravih (L_1) i (L_2).

Odsečak ove normale d između njenih tačaka preseka sa pravama (L_1) i (L_2) predstavlja *najkraće rastojanje* između ovih pravih. Odredimo ovo rastojanje, polazeći od jednačine pravih u obliku (10).

Kako ravan E_0 sadrži pravu (L_1) to ona prolazi kroz tačku $M_1=(\mathbf{r}_1)$ i paralelna je sa vektorima $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, te će njena jednačina biti:

(11) $\quad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0.$

Rastojanje ma koje tačke na pravoj (L_2) od ravni (11) predstavlja najkraće rastojanje d između ovih pravih. Uzimajući za tu tačku tačku $M_2=(\mathbf{r}_2)$ kroz koju prolazi, prava (L_2), dobija se:

(12) $$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|}.$$

Odgovarajući analitički izraz za najkraće rastojanje d je

$$d=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}\cdot\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2\right\}^{-1/2}$$

Ako su jednačine (10) pravih (L_1) i (L_2) napisane u obliku:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1=0,\qquad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{a}_2=0,$$

obrazac za najkraće rastojanje između ovih pravih dat jednakošću (12) ima oblik

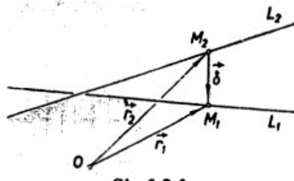
$$d=|\mathbf{r}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{r}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1|/|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|.$$

Kad su prave (L_1) i (L_2) date u obliku:

(13) $\quad \mathbf{r}\times\mathbf{a}_1=\mathbf{b}_1,\qquad \mathbf{r}\times\mathbf{a}_2=\mathbf{b}_2,$

najkraće rastojanje između ovih pravih može se predstaviti obrascem:

(14) $\quad d=|\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1|/|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|.$



Sl. 5.9.5.

Ovaj rezultat može se proveriti svođenjem jednačine (13) na oblik (10) i korišćenjem relacije (12).

Iz jednakosti (12) i (14) proizilaze još i ovi rezultati. Ako se dve prave seku tada je $d=0$, pa iz ovih izraza proizlaze već izvedene jednakosti za uslov preseka dveju pravih u obliku:

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0,$$

odnosno

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1=0.$$

Najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave, čije su jednačine date u obliku:

(15) $\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u\cdot\mathbf{a}_1\qquad \mathbf{s}=\mathbf{r}_2+v\cdot\mathbf{a}_2,$

može se dobiti ako se traži *ekstremna vrednost funkcije*

(16) $\quad f(u,v)=\delta^2=|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^2=d^2.$

Problem se u stvari svodi na to da se odredi položaj tačaka $M_1=(\mathbf{r}_1)$ i $M_2=(\mathbf{r}_2)$ (sl. 5.9.5) na taj način da funkcija $f(u,v)=\delta^2$ dostigne minimalnu vrednost. Na osnovu (16) i (15), funkcija, čiji minimum treba tražiti, definisana je ovim analitičkim izrazom:

(17) $\quad f(u,v)=\delta^2=|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^2=(u\cdot\mathbf{a}_1-v\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2.$

Odavde je:

(18)
$$\frac{\partial f}{\partial u}\equiv 2(\mathbf{r}-\mathbf{s})\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}=2(\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{a}_1=2(\vec{\delta}\mathbf{a}_1)=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}\equiv 2(\mathbf{r}-\mathbf{s})\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}v}=-2(\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{a}_2=-2(\vec{\delta}\mathbf{a}_2)=0.$$

Iz jednakosti (18): $\vec{\delta}\mathbf{a}_1=0$ i $\vec{\delta}\mathbf{a}_2=0$ proizilazi da vektor $\overrightarrow{M_2M_1}=\vec{\delta}$, čiji je modul jednak najkraćem rastojanju mora biti upravan na vektorima $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, tj. mora biti upravan na obema pravama (15).

Ako se prva od jednakosti (18) pomnoži sa u, a druga sa v i dobijene jednakosti saberu, dobiće se:

(19) $\quad (\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot(\mathbf{a}_1\cdot u-\mathbf{a}_2\cdot v)=0.$

Na osnovu jednačina (15) je

$$\mathbf{a}_1\cdot u=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\quad \mathbf{a}_2\cdot v=\mathbf{s}-\mathbf{r}_2,\quad \mathbf{a}_1\cdot u-\mathbf{a}_2\cdot v=\mathbf{r}-\mathbf{s}-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2,$$

pa jednakost (19) postaje:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{s}-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=0,\quad \text{tj.}\quad (\mathbf{r}-\mathbf{s})^2-(\mathbf{r}-\mathbf{s})(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=0,\quad \text{tj.}\quad (\mathbf{r}-\mathbf{s})^2=(\mathbf{r}-\mathbf{s})(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Napred je izveden zaključak da je vektor $\vec{\delta}=\mathbf{r}-\mathbf{s}$ upravan i na vektoru $\mathbf{a}_1$ i na vektoru $\mathbf{a}_2$, a to znači da je vektor kolinearan sa vektorskim proizvodom $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$, tj.

(20) $\quad \vec{\delta}=\mathbf{r}-\mathbf{s}=\mu(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2).$

Zamenom ove vrednosti $\vec{\delta}=\mathbf{r}-\mathbf{s}$ u poslednjoj jednakosti dobija se

$$\mu^2\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)^2=\mu(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),$$

ili kako je $\mu\neq 0$,

(21) $\quad \mu=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)^2.$

Zamenom μ iz (21) u (20) dobijamo za vektor sa modulom jednakim najkraćem rastojanju dveju pravih:

$$\vec{\delta}=\frac{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)^2}\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2).$$

Odavde je

$$\delta^2=d^2=\frac{((\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))^2}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|^2}\Rightarrow d=\frac{|(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|},$$

a ovo je već napred izvedena jednakost (12) za najkraće rastojanje.

Da je vrednost (21) zaista najmanja, može se pokazati obrazovanjem parcijalnih izvoda drugog reda funkcije $f(u, v)=\delta^2$ iz relacija (17) i (18):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=2a_1^2>0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=2a_2^2>0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}=2(a_1 a_2),$$

a na osnovu ovih je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)^2=4a_1^2a_2^2-4(a_1 a_2)^2=a_1^2a_2^2 \sin^2 \sphericalangle(a_1, a_2)=4(a_1 \times a_2)^2>0.$$

To znači da (21) predstavlja minimalnu vrednost funkcije $f(u, v)=\delta^2$.

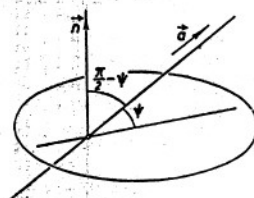
5.10. UGAO IZMEĐU PRAVE I RAVNI

Pod uglom između prave i ravni podrazumeva se ugao između prave i njene projekcije na ravni (ugao između vektora a prave i njene projekcije na ravan). Tome uglu ψ komplementni ugao predstavlja ugao između vektora a prave i normalnog vektora n ravni, tj.

$$\frac{\pi}{2}-\psi=\sphericalangle(a, n).$$

Odavde je:

(1) $$\cos \sphericalangle(a, n)=\sin \psi=\frac{na}{na} \qquad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$



Sl. 5.10.1.

Ako je prava paralelna sa ravni, tada je $\psi=0$, tj. $\sin \psi=0$; vektor a prave $r=r_1+\lambda a$ je upravan na normalnom vektoru n ravni $rn+D=0$, te iz (1) proizilazi kao *uslov paralelnosti prave i ravni* jednakost:

(2) $$na=0.$$

Ako je prava upravna na ravni, ugao $\psi=\frac{\pi}{2}$, normalni vektor ravni n je kolinearan sa vektorom a prave, te je *uslov ortogonalnosti prave i ravni* izražen jednakošću:

(3) $$n=\lambda a \quad \text{ili} \quad n \times a=0.$$

Za dobijanje odgovarajućih analitičkih izraza treba vektore a i n izraziti projekcijama na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema: $a=(l, m, n)$; $n=(A, B, C)$. Prema tome, analitički izraz koji odgovara jednakosti (1) biće:

$$\sin \psi=\frac{Al+Bm+Cn}{(A^2+B^2+C^2)^{1/2}(l^2+m^2+n^2)^{1/2}}.$$

Analitički izraz za uslov paralelnosti prave i ravni izražen je prema (2) jednakošću

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Uslov ortogonalnosti prave i ravni, prema (3), izražen je sledećim analitičkim izrazom:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

ZADATAK 1. **Naći jednačinu prave koja prolazi kroz datu tačku $M_1=(r_1)$, a normalna je na datoj ravni $rn+D=0$.**

Rešenje. Tražena jednačina biće oblika: $r=r_1+\lambda a$. Kako je ova prava upravna na datoj ravni, to je njen vektor a kolinearan sa normalnim vektorom n ravni, tj. $a=k\cdot n$. Uzimajući $k=1$, imamo $a=n$, te će jednačina tražene prave biti: $r=r_1+\lambda n$ ili $(r-r_1)\times n=0$. Odgovarajući analitički oblik je: $\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$.

ZADATAK 2. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_1=(r_1)$, a normalna je na datoj pravoj $(r-r_1)\times a=0$.

Rešenje. Jednačina ravni biće: $(r-r_1)\, n=0$.

Zbog upravnosti ove ravni i date prave mora biti $n=k\cdot a$, te će jednačina tražene ravni biti: $(r-r_1)\, a=0$. Njoj odgovarajući analitički oblik je

$$l\cdot(x-x_1)+m\cdot(y-y_1)+n\cdot(z-z_1)=0.$$

5.11. TAČKA PRESEKA PRAVE I RAVNI

Ako su prava i ravan date jednačinama oblika:

(1) $$r=r_1+\lambda a, \quad rn+D=0 \quad (an \neq 0),$$

tada vektor položaja njihove tačke preseka mora zadovoljavati obe jednačine (1). To znači da ovaj vektor predstavlja rešenje onoga skupa jednačina koji definiše pravu i ravan. Drugim rečima, u (1) treba odrediti vrednost parametra λ na taj način da prava i ravan imaju zajedničku tačku. Zamenom $r=r_1+\lambda a$ u jednačini $rn+D=0$ dobija se:

$$(r_1+\lambda a)\cdot n+D=0, \quad r_1 n+\lambda(a\cdot n)+D=0,$$

odakle je

(2) $$\lambda=-\frac{r_1 n+D}{an}$$

Zamenom ove vrednosti u prvoj od jednačina (1), dobija se vektor položaja tačke preseka prave i ravni:

(3) $$r=r_1-\frac{r_1 n+D}{an}\cdot a.$$

Kad je $a\cdot n\neq 0$, tj. kad prava nije paralelna sa ravni, tada prema (2), odnosno (3), postoji tačka preseka.

Ako je $a\cdot n=0$, tada deljenje na desnoj strani jednakosti (2) nema smisla; prava je paralelna sa ravni.

Ako je $r_1 n+D=0$ i $an=0$, tada prva jednakost predstavlja uslov da ravan $rn+D=0$ prolazi kroz tačku $M_1=(r_1)$ kroz koju prolazi i prava $r=r_1+\lambda a$, dok druga jednakost izražava uslov paralelnosti prave i ravni. To znači da prava leži u ravni. Prema tome, uslov da prava leži u ravni izražen je ovim jednakostima:

(4) $$r_1 n+D=0, \quad an=0.$$

Analitički izrazi koji respektivno odgovaraju jednakostima (2), (3), (4) su:

$$\lambda = -\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn};$$

$$x = x_1 - \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn}\cdot l, \qquad y = y_1 - \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn}\cdot m,$$

$$z = z_1 - \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn}\cdot n;$$

$$Ax_1+Bx_1+Cz_1+D=0, \qquad Al+Bm+Cn=0.$$

NAPOMENA 1. Vektor položaja tačke preseka ravni $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}+D=0$ i prave date jednačinom oblika $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ može se dobiti i ovako. Vektorskim množenjem poslednje jednačine identitetom $\mathbf{n}=\mathbf{n}$ dobija se:

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})=\mathbf{n}\times\mathbf{b}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{a}(\mathbf{r}\mathbf{n})=\mathbf{n}\times\mathbf{b}.$$

Vektor položaja $\mathbf{r}$ tačke preseka zadovoljava poslednju jednačinu, kako i jednačinu ravni $\mathbf{r}\mathbf{n}+D=0$. Za tu tačku iz poslednje jednačine je $\mathbf{r}\mathbf{n}=-D$, te gornja jednakost daje:

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}\mathbf{n})+D\mathbf{a}=\mathbf{n}\times\mathbf{b}.$$

Odavde se za vektor položaja tačke preseka prave i ravni dobija:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{b}-D\mathbf{a}}{\mathbf{a}\mathbf{n}}.$$

ZADATAK 1. Polazeći od gornje relacije za vektor položaja tačke preseka prave $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ i ravni $\mathbf{r}\mathbf{n}+D=0$, prodiskutovati sledeće slučajeve:

a) $\mathbf{a}\mathbf{n}=0$; b) $\mathbf{a}\mathbf{n}=0, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{b}-D\mathbf{a}=0.$

ZADATAK. 2. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz datu pravu $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{a}$ i kroz datu tačku $M_1=(\mathbf{r}_1)$.

Rešenje. Ravan kroz tačku $M_1=(\mathbf{r}_1)$ ima jednačinu $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n}=0$. Kako tačke $M_0=(\mathbf{r}_0)$ i $M_1=(\mathbf{r}_1)$ leže u ovoj ravni, to će u njoj ležati i vektori $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{a}$, pa je normalni vektor $\mathbf{n}$ ravni kolinearan s vektorskim proizvodom poslednja dva vektora, tj.

$$\mathbf{n}=k\cdot((\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}) \qquad (k \text{ skalar}).$$

Jednačina ravni će imati vektorski oblik:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot((\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{a})=0,$$

a njoj odgovarajući analitički oblik je:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

ZADATAK 3. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz datu pravu $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda_1\mathbf{a}_1$ a paralelna je drugoj datoj pravoj $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\lambda_2\mathbf{a}_2$ (ili vektoru $\mathbf{a}_2$ koji nije kolinearan sa $\mathbf{a}_1$).

Rešenje. Tražena ravan prolazi kroz tačku $M=(\mathbf{r}_1)$, pa je njena jednačina $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n}=0$. Ona je paralelna sa nekolinearnim vektorima $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$, te se za njen normalni vektor može uzeti: $\mathbf{n}=k\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)$. Zato je jednačina tražene ravni: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0$.

Njoj odgovarajući analitički oblik je

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

ZADATAK 4. Odrediti geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od pravih

$$\mathbf{r}\times\mathbf{i}=0, \quad \mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=-\mathbf{i}+\mathbf{j}.$$

Rešenje. Ako je $M=(\mathbf{r})$ proizvoljna tačka traženog geometrijskog mesta, a δ i δ' rastojanja ove tačke od prve odnosno druge prave, tada je prema uslovu problema $\delta^2=\delta'^2$. Međutim, prema jednakosti (5) iz 5.9. je

$$\delta=|\mathbf{r}\times\mathbf{i}|, \qquad \delta'=|[\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})]+\mathbf{i}-\mathbf{j}|/|\mathbf{i}+\mathbf{j}| \qquad (|\mathbf{i}+\mathbf{j}|=\sqrt{2}),$$

pa je jednačina traženog geometrijskog mesta

$$|\mathbf{r}\times\mathbf{i}|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|(\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}))+\mathbf{i}-\mathbf{j}\right|\right)^2,$$

ili

(1) $$2\cdot|\mathbf{r}\times\mathbf{i}|^2=\left|(\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}))+\mathbf{i}-\mathbf{j}\right|^2.$$

Analitički izraz za ovo geometrijsko mesto može se dobiti na ovaj način.
Kako je

$$\mathbf{r}\times\mathbf{i}=-y\mathbf{k}+z\mathbf{j}, \quad |\mathbf{r}\times\mathbf{i}|^2=y^2+z^2, \quad \mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=-z\cdot\mathbf{i}+z\cdot\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k};$$

$$(\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}))+\mathbf{i}-\mathbf{j}=(1-z)\cdot\mathbf{i}+(z-1)\cdot\mathbf{j}+(x-y)\cdot\mathbf{k}; \quad |(\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}))+\mathbf{i}-\mathbf{j}|^2=2(z-1)^2+(x-y)^2,$$

zamenom $|\mathbf{r}\times\mathbf{i}|^2$ i $|(\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}))+\mathbf{i}-\mathbf{j}|^2$ iz ovih jednakosti u (1) dobija se u definitivnom obliku analitički izraz za traženo geometrijsko mesto:

$$x^2-y^2-2xy-4z+2=0.$$

ZADATAK 5. Odrediti vektor položaja projekcije tačke $M_1=(\mathbf{r}_1)$ na datu ravan $\mathbf{r}\mathbf{n}+D=0$.

Rešenje. Projekcija tačke M_1 na ravan je tačka prodora normale kroz ovu tačku na datu ravan. Vektor ove normale kolinearan je sa normalnim vektorom date ravni, te je njena jednačina

(1) $$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{n}.$$

Zamenom $\mathbf{r}$ iz ove relacije u jednačini $\mathbf{r}\mathbf{n}+D=0$ nalazimo

$$\lambda=-\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}+D}{\mathbf{n}^2},$$

pa iz (1) sleduje za vektor položaja projekcije M_1 na ravan:

$$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_1-\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}+D}{\mathbf{n}^2}\cdot\mathbf{n}.$$

ZADATAK 6. Odrediti vektor položaja projekcije tačke $M_0=(\mathbf{r}_0)$ na datu pravu $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}$.

Rešenje. Tražena projekcija predstavlja tačku preseka date prave i ravni koja prolazi kroz tačku M_0, a stoji normalno na datoj pravoj. Normalni vektor ove ravni je kolinearan sa vektorom date prave, te je jednačina ravni $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a}=0$.

Rešavanjem ove jednačine i jednačine $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}$, dobijamo

$$(\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a}=0; \qquad \lambda=-\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}.$$

Zamenom ove vrednosti za λ u jednačini date prave $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$, nalazimo vektor položaja $\boldsymbol{r}$ projekcije tačke $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$ na ovu pravu:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{a}}{a^2}\cdot\boldsymbol{a}.$$

ZADATAK 7. Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$, a normalna je na datoj pravoj $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$.

Rešenje. Jednačina ove ravni je oblika $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$. Njen normalni vektor $\boldsymbol{n}$ je kolinearan sa vektorom $\boldsymbol{a}$ prave, tj. $\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{a}$, te je jednačina tražene ravni $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{a}=0$.

ZADATAK 8. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$, a paralelna je dvema pravama $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1$ i $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2$.

Rešenje. Ovaj problem je identičan sa problemom određivanja jednačine ravni koja prolazi kroz jednu datu tačku, a paralelna je sa dva nekolinearna vektora. Stoga će tražena jednačina imati oblik:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)=0.$$

ZADATAK 9. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz datu tačku $M_0=(\boldsymbol{r}_0)$, a paralelna je ravnima $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1+D_1=0$ i $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2+D_2=0$.

Rešenje. Jednačina ove prave će biti oblika $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{a}$. Vektor $\boldsymbol{a}$ ove prave može se odrediti iz uslova da je prava paralelna dvema datim ravnima, tj. upravna na njihovim normalnim vektorima $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$. Zato je vektor $\boldsymbol{a}$ kolinearan sa vektorskim proizvodom $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$, pa će jednačina tražene prave biti

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2).$$

ZADATAK 10. Nad vektorima $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$ i $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$ konstruisan je paralelepiped. Odrediti jednačinu one ravni koja prolazi kroz sredinu ivice OC, a paralelna je strani paralelepipeda, u kojoj leže vektori $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ i pokazati da ta ravan polovi dijagonalu paralelepipeda.

Rešenje. Sredina D vektora $\overrightarrow{OC}$ ima vektor položaja $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3$, a ravan koja sadrži vektore $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ ima jednačinu

(1) $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=0.$

Jednačina ravni, koja je paralelna sa (1), a prolazi kroz tačku D je

(2) $\left(\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3\right)\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=0.$

Vektor dijagonale paralelepipeda je $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$, a vektor $\overrightarrow{OE}$ je

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boldsymbol{d}}{2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3).$$

Zamenom vrednosti $\boldsymbol{r}$ sa $\overrightarrow{OE}$ u jednačinu (2) imamo:

$$\left(\overrightarrow{OE}-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3\right)\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3\right)\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=0,$$

tj. tačka E leži u ravni (2).

ZADATAK 11. Tri nekomplanarna vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, koji imaju zajednički početak u polu, predstavljaju ivice jednog tetraedra. Odrediti jednačinu visine ovog tetraedra povučene iz pola.

Rešenje. Jednačina ravni kroz krajnje tačke vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ je:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\big((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\big)=0,$$

tj. njen normalni vektor $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$.

Vektor $\boldsymbol{h}$ visine tetraedera, koji polazi iz pola, kolinearan je sa ovim normalnim vektorom, tj.

$$\boldsymbol{h}=\mu\,\boldsymbol{n}=\mu\big((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\big)\qquad(\mu\ \text{skalar}).$$

Vektorska jednačina ove visine je $\boldsymbol{r}=k\,\boldsymbol{h}$, tj.

$$\boldsymbol{r}=t\cdot\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\big)\qquad(t=\mu k\ \text{skalarni parametar})$$

ili

$$\boldsymbol{r}=t\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

Analitički izraz koji odgovara ovoj vektorskoj jednačini je:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}a_2-b_2 & a_3-b_3\\ a_2-c_2 & a_3-c_3\end{vmatrix}}=-\frac{y}{\begin{vmatrix}a_3-b_3 & a_1-b_1\\ a_3-c_3 & a_1-c_1\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_2-b_2\\ a_1-c_1 & a_2-c_2\end{vmatrix}}$$

ZADATAK 12. Ako se od tri date ravni:

$$(E_1)\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1+D_1=0;\quad (E_2)\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2+D_2=0\quad \text{i}\quad (E_3)\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_3+D_3=0$$

po dve seku po paralelnim pravama, pokazati da su njihovi normalni vektori komplanarni.

Rešenje. Vektor linije preseka ravni (E_1) i (E_2) je $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$, a vektor linije preseka ravni (E_2) i (E_3) je $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3$.

Vektori $\boldsymbol{a}_1$ i $\boldsymbol{a}_2$ su, po uslovu zadatka, kolinearni, te je $\boldsymbol{a}_1=k\cdot\boldsymbol{a}_2$, tj.

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=k\cdot(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3)\qquad(k\ \text{skalar}).$$

Skalarnim množenjem ove relacije vektorom $\boldsymbol{n}_3$ dobijamo

$$\boldsymbol{n}_3\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=k\cdot\big(\boldsymbol{n}_3\cdot(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3)\big),$$

ili kako je $\boldsymbol{n}_3\cdot(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3)=0$, to je $\boldsymbol{n}_1\cdot(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3)=0$, tj. normalni vektori $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ su komplanarni.

ZADATAK 13. Nad trijedrom vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sa zajedničkim početkom u polu konstruisan je paralelepiped. Odrediti jednačinu prave (L) koja prolazi kroz tačku preseka dijagonala paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, a paralelna je vektoru $\boldsymbol{c}$ i dokazati da ova prava prolazi kroz sredinu dijagonale paralelepipeda.

Rešenje. Tačka S — presek dijagonala paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ ima vektor položaja:

(1) $\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$

Kako prava (L) prolazi kroz tačku S, a paralelna je sa $\boldsymbol{c}$, njena vektorska jednačina će biti:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{c},$$

ili prema (1)

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{c},$$

tj.

(2) $\left(r-\frac{1}{2}(a+b)\right)\times c=0.$

Vektor položaja tačke T — sredine dijagonale paralelepipeda je

$$r_T=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Zamenom r_T u (2) dobijamo:

$$\left(r_T-\frac{1}{2}(a+b)\right)\times c=\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b)\right)\times c=\frac{c}{2}\times c=0,$$

tj. vektor r_T zadovoljava jednačinu (2) prave (L), te (L) prolazi kroz sredinu T dijagonale paralelepipeda.

ZADATAK 14. Odrediti jedinični vektor položaja one tačke, koja leži na pravoj: $x\times i=\frac{2}{3}(j+k)$.

Rešenje. Ova jednačina se može napisati u obliku:

$$x=\frac{2}{3}\{i\times(j+k)\}+\lambda i,$$

ili kako je $i\times j=k$, $i\times k=-j$, to je

$$x=\frac{2}{3}(k-j)+\lambda i.$$

Po uslovu zadatka za traženi vektor x mora biti $x=1$, tj.

$$\frac{8}{9}+\lambda^2=1 \qquad \lambda=\pm\frac{1}{3}.$$

To znači da postoje dva jedinična vektora položaja (dve tačke na datoj pravoj):

$$x_0=\frac{2}{3}(k-j)\pm\frac{1}{2}i$$

koji zadovoljavaju jednačinu date prave.

ZADATAK 15. Odrediti geometrijsko mesto krajnjih tačaka vektora položaja r, koji zadovoljavaju jednačinu:

$$(r\times c)^2=a^2 \qquad (c \text{ konstantni vektor, } a>0).$$

Rešenje. Ako se jednačina $(r\times c)^2=a^2$ napiše u obliku $(r\times c_0)^2=\frac{a^2}{c^2}$ tada $\frac{a}{c}$ predstavlja rastojanje napadne tačke vektora c od prave $r\times c=a$. Kada se a fiksira, data jednačina $(r\times c)^2=a^2$ predstavlja geometrijsko mesto tačaka u prostoru raspoređenih duž pravih, za koje je rastojanje od pola — napadne tačke vektora c konstantno i jednako $\frac{a}{c}$, a to je cilindrična površina. Ako je a promenljivi parametar, to $(r\times c)^2=a^2$ predstavlja jednačinu familije koaksijalnih cilindara sa nosačem vektora c kao osom.

ZADATAK 16. Tačka $M=(r)$ kreće se po pravoj s konstantnom brzinom v. U početnom momentu $t_0=0$ ona se nalazi u tački $M_0=(r_0)$. Odrediti momenat u kome pokretna tačka seče ravan $ra=\alpha$.

Rešenje. Trajektorija pokretne tačke, prema uslovu zadataka, ima jednačinu:

$$r=r_0+vt \qquad (t \text{ vreme}).$$

Potrebno je odrediti vrednost za t koja odgovara tački preseka gornje prave i ravni $ra=\alpha$. Zamenom r iz jednačine $r=r_0+vt$ u jednačinu $ra=\alpha$, nalazimo: $(r_0+vt, a)=\alpha$, odakle je traženi moment prolaza pokretne tačke kroz ravan:

$$t=\frac{\alpha-r_0a}{va}.$$

Zadaci za rešavanje

M I, Analitička geometrija u prostoru:

2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28.

6. POVRŠINE

6.1. OPŠTA JEDNAČINA POVRŠINA DRUGOG REDA, PROUČAVANJE METODOM PRESEKA

Opšta jednačina površina drugog reda je

(1) $$f(x, y, z) \equiv A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_1 yz + 2B_2 zx + 2B_3 xy + 2C_1 x + 2C_2 y + 2C_3 z + D = 0,$$

gde su A_i, B_i, C_i, D $(i=1, 2, 3)$ koeficijenti, a x, y, z koordinate proizvoljne tačke na površini.

Analitička geometrija u prostoru daje postupak prema kome se gornja jednačina može svesti na ograničen broj jednostavnih tzv. kanoničnih oblika, koji odgovaraju različitim tipovima površina drugog reda.

Ako površinu (1) presečemo jednom ravni koja je paralelna koordinatnoj ravni XOY, tada skup jednačina

$$f(x, y, z) = 0, \quad z = h$$

definiše jednačine linije preseka površine sa ravni $z=h$. Smatrajući h promenljivim parametrom, dobiće se jedan skup linija preseka površine (1) sa ravnima paralelnim ravni XOY. Analogno se može proučiti karakter linija preseka površine sa ravnima koje su paralelne ravnima YOZ i XOZ, pa se na osnovu ovako proučenih preseka može dobiti predstava o samoj površini.

U daljem izlaganju ćemo proučiti metodom preseka površine drugog reda čije su jednačine date u kanoničnom obliku. U sam analitički postupak za svođenje jednačine (1) na ove kanonične oblike nećemo se upuštati.

6.2. SFERA

Definicija 1. *Sferom se naziva geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od jedne stalne tačke — središta ili centra.*

Ako se sa C označi centar sfere, određen prema polu O vektorom položaja $\boldsymbol{r}_c$, a sa R poluprečnik sfere, tj. konstantno udaljenje tačke na sferi od centra, tada je

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_c + \overrightarrow{MC},$$

odakle proizilazi

$$\overrightarrow{MC} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c, \quad |\overrightarrow{MC}| = R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c|.$$

Jednačina sferne površine može se predstaviti u obliku

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c| = R, \quad \text{ili} \quad |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c|^2 = R^2$$

ili

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c)^2 = R^2.$$

Ako je $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_c = (a, b, c)$, analitički izraz jednačine sferne površine ima oblik

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

U specijalnom slučaju, kada se pol nalazi u početku Dekartovog pravouglog sistema, tada jo $\boldsymbol{r}_c = 0$, tj. $a=b=c=0$, te je jednaćina sferne površine oblika

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Zadatak 1. Izvesti opšti oblik jednačine sferne površine koja:

a) prolazi kroz koordinatni početak;

b) ima centar u jednoj od koordinatnih ravni, a prolazi kroz početak;

c) dodiruje sve tri koordinatne ravni.

Zadatak 2. Kroz koordinatni početak O povučena je jedna pokretna prava i kroz jednu stalnu tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ povučena je ravan upravno na ovu pravu.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka preseka pokretne prave sa odgovarajućom ravni.

Rešenje. Jednačina pokretne prave je

(1) $$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = z \quad (l \text{ i } m \text{ promenljivi parametri}),$$

a jednačina na njoj upravne ravni kroz tačku M_1 je

(2) $$l(x-x_1) + m(y-y_1) + z - z_1 = 0.$$

Eliminacijom dva parametra l i m iz tri jednačine (1) i (2) dobija se traženo geometrijsko mesto. Postupak eliminacije je sledeći. Iz jednačina (1) je

$$l = \frac{x}{z}, \quad m = \frac{y}{z},$$

pa zamenom u (2) dobijamo

$$x(x-x_1) + y(y-y_1) + z(z-z_1) = 0, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - x_1 x - y_1 y - z_1 z = 0.$$

Ova jednačina analitički predstavlja traženo geometrijsko mesto, a to je sferna površina.

Preporučuje se čitaocu da odredi koordinate centra i poluprečnik ove sfere, kao i koordinate dveju tačaka kroz koje prolazi sfera.

Zadatak 3. Data je sfera sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom r i jedna stalna tačka $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Na sferi je data pokretna tačka P_0, a tačka Q deli duž P_0P_1 u razmeri $\lambda : 1$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka Q, ako se tačka P_0 kreće po sferi.

Rešenje. Ako je $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i $Q(x, y, z)$, tada je prema uslovima zadatka

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2; \quad x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1+\lambda}.$$

Rezultat eliminacije tri parametra (x_0, y_0, z_0) iz prethodne četiri jednačine predstavljaće traženo geometrijsko mesto. Iz poslednje tri jednakosti proizilazi

$$x_0=(1+\lambda)\,x-\lambda x_1, \quad y_0=(1+\lambda)\,y-\lambda y_1, \quad z_0=(1+\lambda)\,z-\lambda z_1,$$

pa se zamenom u prvu od pretposlednjih relacija dobija geometrijsko mesto u obliku:

$$((1+\lambda)\,x-\lambda x_1)^2+((1+\lambda)\,y-\lambda y_1)^2+((1+\lambda)\,z-\lambda z_1)^2=r^2,$$

koje predstavlja sfernu površinu.

6.3. ELIPSOID

Elipsoid (sl. 6.3.1) predstavlja površinu drugog reda čija je jednačina u kanoničnom obliku:

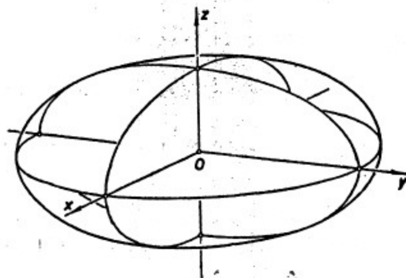
$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c).$$

Ako koordinate tačke $M(x, y, z)$ zadovoljavaju jednačinu (1), tada ovu jednačinu zadovoljavaju i koordinate tačke $M'(-x, -y, -z)$, tj. tačke M i M' leže na elipsoidu. Odatle proizilazi da je elipsoid (1) površina simetrična prema koordinatnom početku (*središte elipsoida*).

Rešenja jednačine (1) npr. po z su

$$z=\pm c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2},$$

odakle proizilazi da ravan XOY predstavlja ravan simetrije elipsoida. Isto tako preostale dve koordinatne ravni predstavljaju njegove ravni simetrije.



Sl. 6.3.1.

Presek elipsoida (1) sa ravni

$$(2) \qquad z=h$$

predstavlja liniju čije su jednačine definisane skupom jednakosti (1) i (2).

U ravni (2) jednačina linije preseka je

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Za $|h|<c$ ova će jednačina predstavljati realne elipse. Za $|h|>c$ ona predstavlja imaginarne elipse, a za $|h|=c$ iz (3) proizilazi $x=0$, $y=0$, tj. ravni $z=\pm c$ imaju po jednu zajedničku tačku sa elipsoidom i to $C(0, 0, c)$ odnosno $C'(0, 0, -c)$. Ove tačke se zovu *temena*. Analogno se mogu ispitati preseci elipsoida sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima XOZ i YOZ. Cela površina je zatvorena u pravouglom paralelepipedu sa ivicama $2a$, $2b$, $2c$, koji je definisan skupom ravni:

$$x=\pm a, \quad y=\pm b, \quad z=\pm c.$$

Zadatak 1. Iz jedne pokretne tačke P na elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ spuštena je normala PC na ravan XOY i preko tačke P produžena za

$$\text{a) } PQ=PC; \quad \text{b) } PQ=\frac{1}{2}PC; \quad \text{c) } PC:PQ=\lambda:1.$$

Odrediti geometrijsko mesto tačaka Q, ako se tačka P kreće po datom elipsoidu.

Rešenje. Daćemo odgovor na pitanje pod a). Ako tačka $P(x, y, z)$ leži na elipsoidu, tada tačka $Q(x, y, \zeta)$ leži na traženoj površini. Prema uslovu zadatka je $\zeta=2z$, tj. $z=\frac{\zeta}{2}$, pa je $P\left(x, y, \frac{\zeta}{2}\right)$. Ove koordinate moraju zadovoljavati jednačinu datog elipsoida, tj.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{4c^2}=1$$

ili zamenjujući ζ sa z, dobija se traženo geometrijsko mesto:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{4c^2}=1.$$

Čitalac može samostalno da dâ odgovore na pitanja pod b) i c).

Zadatak 2. Date su dve stalne tačke F i F_1 $(\overline{FF_1}=2d)$. Odrediti geometrijsko mesto tačke P koja se u prostoru kreće tako da je $PF+PF_1=2a=\text{const.}$

Uputstvo. Dekartov pravougli koordinatni sistem treba odrediti tako da njegov početak O bude na sredini duži FF_1, a da se ova poklopi sa osom OX.

Čitalac će ovim putem doći do jednačine traženog geometrijskog mesta u obliku:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2-d^2}=1.$$

Zadatak 3. U jednoj elipsi E_1 sa osama $2a$ i $2b$ povučena je tetiva PQ upravno na osu $2a$. Tetiva PQ je jedna od osa elipse E_2 čija je ravan upravna na ravni elipse E_1.

Odrediti jednačinu površine koju će opisati elipsa E_2, ako se tetiva PQ pomera paralelno, pri čemu je razmera poluosa ove elipse konstantna i jednaka datom broju k.

Rešenje. Jednačina elipse E_1 je

$$(E_1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0,$$

pri čemu je za početak koordinatnog sistema izabran centar ove elipse, a ose OX i OY se poklapaju respektivno sa njenim osama $2a$ i $2b$. Tada je jednačina pokretne tetive $x=\alpha$, a njena polovina prema jednačini (E_1): $\frac{PQ}{2}=\frac{b}{a}(a^2-\alpha^2)^{1/2}$.

Elipsa E_2 koja leži u ravni $x=\alpha$ paralelnoj ravni YOZ ima središte u tački $(\alpha, 0, 0)$, a poluose su joj $\frac{1}{2}PQ$ (paralelna osi OY) i $k\cdot\frac{1}{2}PQ$ (paralelna osi OZ). Jednačine ove elipse su definisane skupom jednakosti

$$x=\alpha, \quad \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2}+\frac{z^2}{\left(k\cdot\frac{1}{2}PQ\right)^2}=1$$

ili

$$(E_2)\qquad x=\alpha,\quad k^2y^2+z^2=k^2\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2$$

ili zamenom vrednosti za $\frac{1}{2}PQ$:

$$(E_2)\qquad x=\alpha,\quad k^2y^2+z^2=k^2\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

Eliminacijom parametra α iz ove dve jednakosti dobija se

$$k^2y^2+z^2=\frac{k^2b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{k^2b^2}=1.$$

6.4. JEDNOGRANI HIPERBOLOID

Jednogranim hiperboloidom (sl. 6.4.1) naziva se površina drugog reda čija je jednačina u kanoničnom obliku

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Na isti način kao kod elipsoida i ovde se pokazuje da je površina simetrična u odnosu na koordinatni početak i da koordinatne ravni predstavljaju njene ravni simetrije.

Preseci jednogranog hiperboloida sa ravnima paralelnim ravni XOY su elipse:

$$z=h,\quad \frac{x^2}{a^2(1+h^2/c)^2}+\frac{y^2}{b^2(1+h^2/c^2)}=1.$$

Preseci sa ravnima paralelnim ravni YOZ su

$$x=k,\quad \frac{y^2}{b^2(1-k^2/a^2)}-\frac{z^2}{c^2(1-k^2/a^2)}=1.$$

Za $|k|<a$ ove linije preseka će biti hiperbole sa realnim osama paralelnim OY-osi, a sa imaginarnim — paralelnim OZ-osi. Za $|k|>a$ linije preseka su hiperbole sa realnim osama paralelnim OZ-osi, a imaginarnim — paralelnim OY-osi. Za $k=\pm a$ iz jednačine površine imamo

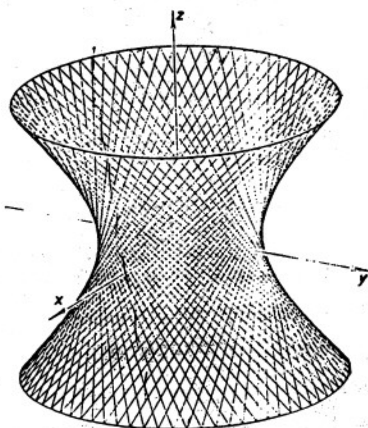
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

tj.

$$\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0,$$

tj. preseci površine sa ravnima $x=\pm a$ predstavljaju skup pravih

$$x=-a,\quad \frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0$$



Sl. 6.4.1.

i

$$x=a,\quad \frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0.$$

Prava $x=0$, $y=0$, tj. osa OZ ne seče površinu jer jednačina površine daje $z=\pm ci$ $(i=\sqrt{-1})$.

Analogni zaključci se mogu izvesti ako se analiziraju i linije preseka sa ravnima paralelnim ravni XOZ.

Isto tako jednačine

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad\text{i}\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

predstavljaju jednograne hiperbolide, od kojih prvi nema presečenih tačaka sa osom OY, a drugi sa osom OX.

ZADATAK 1. Data je hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$. Jedna promenljiva elipsa, čiji centar leži na OZ-osi i čije su ose paralelne OX odnosno OY-osi, kreće se tako da odnos njenih poluosa ostaje konstantan $\left(=\frac{a}{b}\right)$ i da stalno seče datu hiperbolu.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje obrazuje pokretna elipsa.

Rešenje. Ako su α i β poluose pokretne elipse, tada je prema uslovu zadatka $\alpha/\beta=a/b$, tj. $\beta=\frac{b}{a}\alpha$. Ova elipsa leži u pokretnoj ravni $z=k$ (k — promenljivi parametar). Stoga su jednačine ove elipse definisane skupom jednakosti

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\quad z=k.$$

Teme ove elipse $A(\alpha,0,k)$ u ravni XOZ zadovoljava jednačinu date hiperbole, tj. mora postojati jednakost

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{k^2}{c^2}=1.$$

Eliminacijom parametara α i k iz pretposlednjih dveju i poslednje jednačine dobijamo:

$$k=z,\quad \alpha^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Zamenom u $x^2+a^2\frac{y^2}{b^2}=\alpha^2$, dobijamo jednačinu traženog geometrijskog mesta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ZADATAK 2. Dat je jednograni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ i skup od dve ravni $y^2-m^2z^2=0$. Kako se mora odabrati parametar m da površina, koja prolazi kroz ova dva ravna preseka hiperboloida, predstavlja sfernu površinu?

Rešenje. Skup svih površina drugog reda, koje prolaze kroz linije preseka datog hiperboloida i datih dveju ravni, definisan je jednakošću:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda(y^2-m^2z^2)=0,$$

gde je λ promenljivi parametar. Ovaj skup će predstavljati sfernu površinu ako su ispunjena sledeća dva uslova:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\lambda=-\frac{1}{c^2}-m^2\lambda,$$

iz kojih se nalazi:

$$\lambda=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}, \quad m^2=\frac{b^2(a^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}.$$

6.5. DVOGRANI HIPERBOLOID

Dvograni hiperboloid (sl. 6.5.1) predstavlja jednu od površina drugog reda čija je jednačina u kanoničnom obliku

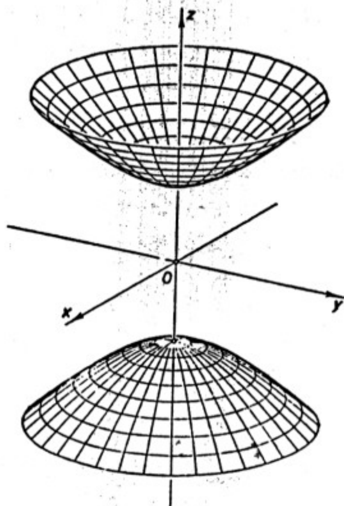
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Ova površina je simetrična u odnosu na koordinatni početak O, kao i u odnosu na koordinatne ravni. Linije preseka ove površine sa ravni $z=h$ su krive definisane skupom jednačina

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1, \quad z=h.$$

Za $\frac{h^2}{c^2}-1>0$, tj. $|h|>c$ ove linije predstavljaju realne elipse sa poluosama

$$a\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)^{1/2} \text{ i } b\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)^{1/2}$$



Sl. 6.5.1.

Za $\frac{h^2}{c^2}-1<0$, tj. $|h|<c$ linije preseka su imaginarne elipse, što znači da za $-c<h<+c$ ravni $z=h$ ne seku površinu; površina u pojasu između ravni $z=-c$ i $z=+c$ ne postoji. Za $|h|=c$, tj. $z=-c$ i $z=+c$ iz jednačine površine proizilazi $x=0$, $y=0$. Ravni $z=\pm c$ imaju po jednu zajedničku tačku sa površinom i to $S_1(0, 0, c)$ odnosno $S_2(0, 0, -c)$.

Linije preseka površine sa ravni $x=k$ su

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}=1, \quad x=k,$$

a ove su hiperbole u ravni $x=k$ sa realnom osom paralelnom osi OZ i imaginarnom osom paralelnom osi OY.

Najzad linije preseka površine sa ravni $y=l$ su

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{l^2}{b^2}\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{l^2}{b^2}\right)}=1, \quad y=l,$$

a to su opet hiperbole u ravni $y=l$, čija je realna osa paralelna osi OZ, a imaginarna — paralelna osi OX.

Analogno se mogu proučiti i sledeći kanonični oblici jednačina dvogranih hiperboloida:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{i} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

ZADATAK 1. Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje obrazuje elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\alpha^2}{c^2}-1, \quad z=\alpha \qquad (|\alpha|>c)$$

ako parametar α varira.

Rešenje. Eliminacijom parametra α iz gornje dve jednačine dobija se jednačina geometrijskog mesta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

a ovo je jednačina dvogranog hiperboloida.

ZADATAK 2. Data je hiperbola $x^2/a^2-z^2/c^2=1$, $y=0$. Jedna promenljiva hiperbola, čiji centar leži na osi OZ, a čije su ose paralelne osi OX odnosno OY, pri čemu je odnos njenih poluosa konstantan $\left(=\frac{a}{b}\right)$ kreće se tako da seče datu hiperbolu.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje obrazuje pokretna hiperbola.

Rešenje. Obeležimo sa α i β poluose pokretne hiperbole; tada je $\beta=\frac{b}{a}\alpha$.

Njene jednačine su definisane skupom jednakosti:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{a^2y^2}{b^2\alpha^2}=1, \quad z=k,$$

gde je k promenljivi parametar. Teme ove hiperbole $A(\alpha, 0, k)$ u ravni XOZ zadovoljava jednačinu date nepokretne hiperbole, te je

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{k^2}{c^2}=1.$$

Eliminacijom parametara α i k iz pretposlednjih dveju i poslednje jednačine dobija se

$$k=z, \quad \alpha^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Zamenom u $x^2-\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$ dobija se jednačina traženog geometrijskog mesta:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

6.6. ELIPTIČNI PARABOLOID

Eliptičnim paraboloidom (sl. 6.6.1) naziva se površina drugog reda čija je jednačina u kanoničnom obliku

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Iz jednačine površine neposredno proizilazi: 1) da ona prolazi kroz koordinatni početak i 2) da se nalazi iznad ravni XOY (za $p<0$, $q<0$ ispod ove ravni). Rešenja jednačine eliptičnog paraboloida po x i y daju

$$x=\pm\sqrt{p\left(2z-\frac{y^2}{q}\right)},\quad y=\pm\sqrt{q\left(2z-\frac{x^2}{p}\right)}\quad (z\geqq 0),$$

odakle se zaključuje da je površina simetrična prema koordinatnim ravnima YOZ i XOZ.

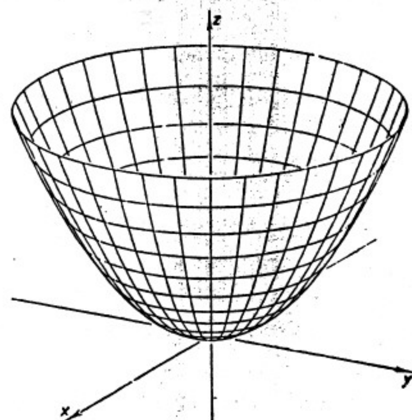
Površina nema središta. Linije preseka eliptičnog paraboloida sa ravnima paralelnim sa ravni XOY su

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad z=h,$$

tj. u ravni $z=h$:

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1,$$

a to su za $h>0$ realne elipse čiji su kvadrati poluosa $2ph$ i $2qh$. Za $h<0$ linije preseka su imaginarne elipse, tj. za $z=h<0$ površina ne postoji, što se može neposredno zaključiti iz jednačine površine.



Sl. 6.6.1.

Linije preseka površine sa ravni paralelnom ravni YOZ, tj. sa ravni $x=k$ su

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\qquad x=k,$$

ili u ravni $x=k$ to su parabole

$$y^2=2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right)$$

sa osom paralelnom osi OZ, parametrom q i temenom u tački $(k,\ 0,\ k^2/2p)$. Potpuno analogni zaključci se mogu izvesti ako se ispitaju preseci eliptičnog paraboloida sa ravni $y=l$ paralelnom ravni XOZ. Linije preseka su definisane skupom jednačina

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\qquad y=l,$$

odnosno u ravni $y=l$ to će biti parabole

$$x^2=2p\left(z-\frac{l^2}{2q}\right)$$

sa osom paralelnom osi OZ, parametrom p i temenom u tački $(0,\ l,\ l^2/2q)$.

ZADATAK 1. U paraboli $y^2=2px$, $z=0$ povučena je tetiva PQ upravno na njenu osovinu. Ova tetiva je jedna osa elipse (E) čija je druga osa takođe upravna na osi date parabole. Poluose ove pokretne elipse stoje u konstantnom odnosu $(b/a=\sqrt{q/p})$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje obrazuje elipsa (E) ako se tetiva PQ kreće ostajući paralelna osi OY.

Rešenje. Rešavanjem jednačine $x=\alpha$ pokretne tetive PQ sa jednačinom parabole, nalazi se jedna poluosa pokretne elipse (E): $a=\frac{1}{2}PQ=\sqrt{2p\alpha}$. Druga poluosa ove elipse se dobija iz uslova $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{q}{p}}$, tj. $b=a\sqrt{\frac{q}{p}}=\sqrt{2q\alpha}$. Elipsa (E) je analitički definisana skupom ovih dveju jednačina:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\quad x=\alpha,\quad \text{tj.}\quad \frac{y^2}{2p\alpha}+\frac{z^2}{2q\alpha}=1,\quad x=\alpha.$$

Eliminacijom parametra α iz poslednje dve jednačine, nalazimo za traženo geometrijsko mesto

$$y^2/p+z^2/q=2x,$$

tj. eliptični paraboloid.

ZADATAK 2. Kroz teme paraboloida $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ povučene su tetive i svaka od njih produžena za polovinu svoje dužine. Odrediti geometrijsko mesto krajnjih tačaka ovih produženja.

Rešenje. Ako je $r=(x,\ y,\ z)$ vektor položaja proizvoljne tačke M na datom eliptičnom paraboloidu, tada je

(1) $$x=r\cos\alpha,\quad y=r\cos\beta,\quad z=r\cos\gamma\quad (r_0=\text{ort}\,r=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)).$$

Vektor položaja $R=(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ tačke N koja leži na nosaču vektora r po uslovu zadatka je $R=\frac{3}{2}r$, tj.

(2) $$\xi=\frac{3}{2}r\cos\alpha,\quad \eta=\frac{3}{2}r\cos\beta,\quad \zeta=\frac{3}{2}r\cos\gamma.$$

Koordinate (1) zadovoljavaju jednačinu paraboloida, tj.

(3) $$\frac{r^2\cos^2\alpha}{p}+\frac{r^2\cos^2\beta}{q}=2r\cos\gamma.$$

Iz četiri jednakosti (2) i (3) mogu se eliminisati tri parametra $(r\cos\alpha,\ r\cos\beta,\ r\cos\gamma)$, pa će se najpre iz (2) dobiti

$$r\cos\alpha=\frac{2}{3}\xi,\quad r\cos\beta=\frac{2}{3}\eta,\quad r\cos\gamma=\frac{2}{3}\zeta.$$

Zamenom u (3) dobija se

$$\frac{4}{9}\frac{\xi^2}{p}+\frac{4}{9}\frac{\eta^2}{q}=\frac{4}{3}\zeta,$$

tj. u definitivnom obliku traženo geometrijsko mesto ima jednačinu

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=3\zeta,$$

a ova predstavlja eliptični paraboloid.

6.7. HIPERBOLIČNI PARABOLOID

Hiperbolični paraboloid (sl. 6.7.1) je površina drugog reda čija jednačina u kanoničnom obliku ima oblik

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Čitalac može lako da utvrdi da ova površina prolazi kroz koordinatni početak, da su ravni YOZ i XOZ njene ravni simetrije i da površina nema središta.

Linije preseka površine sa ravnima $z=h$ paralelnim koordinatnoj ravni XOY definisane su skupom jednačina

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad z=h,$$

tj. u ravni $z=h$ to će biti

$$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1.$$

Za $h>0$ ove će linije predstavljati hiperbole sa realnom osom paralelnom osi OX i imaginarnom — paralelnom osi OY. Za $h<0$ ove linije će biti opet hiperbole sa realnom osom paralelnom osi OY, a imaginarnom — paralelnom osi OX. Presek površine sa ravni $z=0$ je u toj ravni definisan jednakošću

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0$$

koja predstavlja skup dve prave

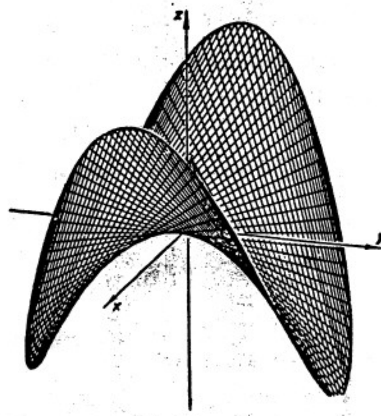
$$\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Linije preseka površine sa ravnima paralelnim sa ravni YOZ definisane su skupom jednačina

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad x=k,$$

tj. u ravni $x=k$, to će biti krive

$$(1) \qquad y^2=-2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right).$$



Sl. 6.7.1.

To su parabole sa temenom u tački $\left(k,\ 0,\ \frac{k^2}{2p}\right)$, parametrom q i pravom paralelnom negativnoj grani ose OZ kao osom simetrije.

Analogno linije preseka površine sa ravni $y=l$ u toj ravni definisane su jednačinom

$$(2) \qquad x^2=2p\left(z+\frac{l^2}{2q}\right).$$

To su parabole sa temenom u tački $\left(0,\ l,\ -\frac{l^2}{2q}\right)$, parametrom p i pravom paralelnom osi OZ kao osom simetrije.

Koordinate temena parabole (1) zadovoljavaju jednačinu one od parabola (2) koja leži u ravni $y=0$, $(l=0)$, tj. jednačinu $x^2=2pz$. Isto tako koordinate temena parabole (2) zadovoljavaju jednačinu parabole $y^2=-2qz$ koja se iz (2) dobija za $k=0$ (leži u ravni $x=0$).

To znači da hiperbolični paraboloid predstavlja geometrijsko mesto tačaka koje obrazuje jedna pokretna parabola sa datim parametrom čije se teme kreće po jednoj utvrđenoj paraboli, pri čemu su ravni ovih dveju parabola upravne, a njihove ose simetrije su među sobom paralelne.

Ova činjenica se može analitički proveriti na taj način što treba, na primer, iz skupa jednačina

$$y^2=-2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right), \qquad x=k,$$

eliminisati promenljivi parametar k, pa će se dobiti jednačina geometrijskog mesta u obliku

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

ZADATAK 1. Ispitati pod kojim uslovima prava $y=mx+b$, $z=nx+c$ leži na hiperboličnom paraboloidu $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$.

Rešenje. Zamenom y i z iz jednačina prave u jednačinu paraboloida dobija se

$$\frac{(mx+b)^2}{p}-\frac{(nx+c)^2}{q}=2x,$$

ili

$$\left(\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{q}\right)x^2+2\left(\frac{bm}{p}-\frac{cn}{q}-1\right)x+\frac{b^2}{p}-\frac{c^2}{q}=0.$$

Ako data prava leži na paraboloidu, poslednja jednačina mora biti identički zadovoljena za sve realne vrednosti x, a to će biti tada i samo tada ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{q}=0, \quad \frac{bm}{p}-\frac{cn}{q}-1=0, \quad \frac{b^2}{p}-\frac{c^2}{q}=0.$$

ZADATAK 2. Pokazati da su na hiperboličnom paraboloidu $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ moguća dva skupa pravih čije jednačine treba odrediti.

Rešenje. Ako se jednačina površine napiše u obliku

$$(1) \qquad \left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=2x$$

i stavi najpre

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \text{ parametar});$$

tada je prema prethodnoj jednačini

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x,$$

te je prvi skup pravih:

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x.$$

Stavimo li

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu} \quad (\mu \text{ parametar}),$$

tada iz (1) proizilazi

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x.$$

Drugi skup pravih je definisan jednačinama

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu}, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x.$$

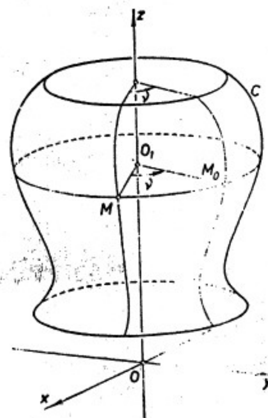
6.8. ROTACIONE POVRŠINE

Kriva (C) $f(y, z)=0$ koja leži u ravni YOZ i ne seče osu OZ (sl. 6.8.1) rotira oko ove ose. Tako nastala površina naziva se *rotacionom* ili *obrtnom površinom*, a osa OZ — *osom rotacije*.

Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka na rotacionoj površini, a M_0 položaj ove tačke na krivoj (C) u ravni YOZ, tada je $O_1M_0=O_1M=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, te tačke M_0 ima koordinate $M_0(0, \rho, z)$, tj. $M_0(0, \sqrt{x^2+y^2}, z)$. Kako ova tačka leži na krivoj (C), to njene koordinate moraju zadovoljavati jednačinu ove krive, tj. mora biti

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu rotacione površine nastale rotacijom krive (C) oko ose OZ.



Sl. 6.8.1.

NAPOMENA 1. Ako je kriva (C) u ravni YOZ data u obliku

(C) $\qquad y=\psi(u)>0 \quad z=\varphi(u),$

tada parametar u karakteriše položaj tačke M_0 na krivoj, a uslov $\psi(u)>0$ znači da ova kriva ne seče osu OZ. Položaj tačke $M(x, y, z)$ na rotacionoj površini određen je, pored parametra u, uglom v za koji treba obrnuti krivu (C) oko ose OZ, da bi tačka M_0 došla u položaj M. Iz slike proizilazi, pošto je $y=O_1M_0=\psi(u)=O_1M$:

(1) $\qquad x=\psi(u)\sin v, \quad y=\psi(u)\cos v, \quad z=\varphi(u),$

ili

(2) $\qquad r(u, v)=\psi(u)\cdot e(v)+\varphi(u)\cdot k,$

gde je $e(v)=\sin v\cdot i+\cos v\cdot j$. Jednačina (2) predstavlja *vektorsku jednačinu rotacione površine* u krivolinijskim koordinatama (u, v), a (1) njoj odgovarajuće parametarske jednačine.

Za $v=v_0=$const, dobijaju se na površini krive linije $r(u, v_0)=\psi(u)\cdot e(v_0)+\varphi(u)\cdot k$ koje se nazivaju *meridijanima*. Za $u=u_0=$const dobija se na površini skup krugova $r(u_0, v)=\psi(u_0)\cdot e(v)+\varphi(u_0)k$, koji se nazivaju *paraleli*.

NAPOMENA 2. Neka je kriva (C) data u obliku

(3) $\qquad F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0,$

a osa rotacije u obliku

(4) $\qquad \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$

pri čemu kriva (3) ne seče pravu (4). Neka je još $\overrightarrow{OM_0}=r_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{OM}=r=(x, y, z)$. Vektor $r-r_0$ leži u ravni kruga koji pri rotaciji krive (3) oko prave (4) opisuje tačka M, pa je on upravan na vektoru ose rotacije $a=(l, m, n)$, tj.

(5) $\qquad a\cdot(r-r_0)=0.$

Projekcije vektora r_0 zadovoljavaju jednačine (3), te je

(6) $\qquad F_1(x_0, y_0, z_0)=0, \quad F_2(x_0, y_0, z_0)=0.$

Rastojanja tačaka M_0 i M od ose rotacije (4) su respektivno

$$\overline{OM_0}=|(r_0-r)\times a|, \quad \overline{OM}=|(r-r_1)\times a|.$$

Kako tačke M_0 i M pripadaju istom paralelu, to je $\overline{OM_0}=\overline{OM}$, tj.

(7) $\qquad |(r_0-r)\times a|=|(r-r_1)\times a|.$

Iz četiri uslovne jednakosti (5), (6) i (7), eleminacijom tri promenljiva parametra x_0, y_0, z_0 dobija se jednačina rotacione površine u obliku

$$\Phi(x, y, z)=0.$$

ZADATAK 1. Elipsa $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$ rotira oko: a) Z-ose; b) Y-ose. Odrediti jednačine nastalih rotacionih površina.

Rešenje. a) Zamenjujući y sa $\sqrt{x^2+y^2}$ dobija se: $\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

b) Zamenom z sa $\sqrt{x^2+z^2}$ dobija se: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1.$

Nađene površine predstavljaju obrtne (rotacione) elipsoide sa osama rotacija OZ odnosno OY.

ZADATAK 2. Parabola koja leži u ravni XOZ i ima $+X$-osu za svoju osu, a O za teme, rotira oko ose OZ. Naći jednačinu odgovarajuće rotacione površine.

Rešenje. Parabola u ravni XOZ, sa osom OX, temenom u O i parametrom p ima jednačinu $z^2=2px$. Zamenom x sa $\sqrt{x^2+y^2}$ dobijamo za jednačinu rotacione površine

$$z^2=2p\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tj.} \quad z^4-4p^2(x^2+y^2)=0.$$

ZADATAK 3. Krug $(x-a)^2+z^2=r^2$ $(r<a)$ u ravni XOZ rotira oko ose OZ. Odrediti jednačinu rotacione površine.

Rezultat. Rotaciona površina je torus čija je jednačina

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2 \quad \text{ili} \quad (x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

ZADATAK 4. Date su dve mimoilazne prave. Koju površinu opisuje jedna od njih ako rotira oko druge?

Rezultat. Ako pravu koja predstavlja osu rotacije uzmemo za osu OZ, a za osu OX odaberemo zajedničku normalu dve date prave, tada prava koja rotira prolazi kroz tačku $M_1(a, 0, 0)$, a paralelna je vektoru $\mathbf{a}_1 = m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ (pošto je upravna na osi OX). Jednačina ove prave ima oblik

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}, \quad \text{ili} \quad x=a, \quad y=\frac{m}{n}z.$$

Pri rotaciji ove prave oko ose OZ proizvoljna tačka M ove prave opisuje krug, pri čemu je kvadrat rastojanja ove tačke od ose rotacije x^2+y^2, jednak na osnovu prethodnih jednačina

$$x^2+y^2=a^2+\frac{m^2}{n^2}z^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{an}{m}\right)^2}=1.$$

Nađeno geometrijsko mesto predstavlja rotacioni jednograni hiperboloid. Karakteristika ove površine je ta da ona predstavlja pravolinijsku površinu, tj. može u celini biti konstruisana iz pravih.

6.9. VEKTORSKA JEDNAČINA PRAVOLINIJSKIH POVRŠINA

Pravolinijskom površinom se naziva geometrijsko mesto pravih. Neka je

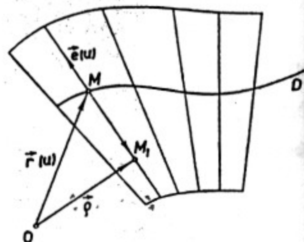
$$(D) \qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}(u)$$

jedna kriva u prostoru — *direktrisa* (sl. 6.9.1). U svakoj njenoj tački neka je dat jedinični vektor $\mathbf{e}$ koji je funkcija istog parametra u:

$$\mathbf{e}=\mathbf{e}(u).$$

Ako se u proizvoljnoj tački M direktrise konstruiše vektor $\overrightarrow{MM_1}$ kolinearan sa $\mathbf{e}(u)$, dobiće se skup pravih (nosača vektora $\overrightarrow{MM_1}$) koji zavise od parametra u i koje se nazivaju *generatrisama*. Označujući $MM_1=v$, dobijamo

$$\overrightarrow{MM_1}=v\cdot\mathbf{e}(u).$$



Sl. 6.9.1.

Ako je $\vec{\rho}$ vektor položaja proizvoljne tačke M_1 na pravolinijskoj površini, tada je prema slici

$$\vec{\rho}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM_1}, \quad \text{tj.} \quad \vec{\rho}=\mathbf{r}(u)+v\cdot\mathbf{e}(u).$$

Poslednja jednačina predstavlja *vektorsku jednačinu pravolinijske površine.* Uzmemo li da je $u=u_0=\text{const}$, tada je

$$\vec{\rho}=\mathbf{r}(u_0)+v\cdot\mathbf{e}(u_0),$$

tj. v-koordinatne linije su prave koje se poklapaju sa generatrisom.

Za $v=v_0=\text{const}$ je

$$\vec{\rho}=\mathbf{r}(u)+v_0\cdot\mathbf{e}(u).$$

Dakle, u-koordinatna linija je linija paralelna direktrisi.

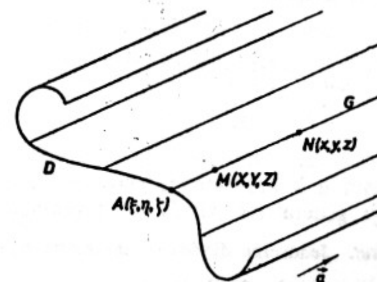
6.10. CILINDRIČNE POVRŠINE

Definicija 1. ***Cilindrična površina*** (sl. 6.10.1) *je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje obrazuje jedna prava — izvodnica (generatrisa) koja se, ostajući paralelna datom vektoru, translatorno kreće duž jedne date krive u prostoru — vodilje (direktrise).*

Cilindrična površina je, prema tome, pravolinijska površina. Ako je vektor $\mathbf{a}$ dat, tj. ako je $\mathbf{a}=(l, m, n)$, tada

$$(G) \qquad X=x+tl, \quad Y=y+tm, \quad Z=z+tn$$

predstavljaju parametarske jednačine ma koje prave paralelne sa vektorom $\mathbf{a}$, a t parametar.



Sl. 6.10.1.

Jednačine direktrise mogu se definisati skupom jednačina

$$(D) \qquad \Phi_1(x, y, z)=0, \quad \Phi_2(x, y, z)=0.$$

Neka je $A(\xi, \eta, \zeta)$ tačka u kojoj generatrisa (G) seče direktrisu (D), tada njene koordinate zadovoljavaju jednačine

$$(1) \qquad \xi=x+tl, \quad \eta=y+tm, \quad \zeta=z+tn; \qquad \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)=0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta)=0,$$

gde su (x, y, z) koordinate proizvoljne tačke na generatrisi G.

Ovih pet jednakosti sadrže četiri parametra: ξ, η, ζ, t. Eliminacijom tih parametara dolazi se do jednačine

$$(2) \qquad F(x, y, z)=0,$$

koja daje vezu između koordinata jedne tačke na generatrisi odnosno na cilindričnoj površini.

Pema tome, jednakost (2), koja predstavlja rezultat eliminacije promenljivih parametara ξ, η, ζ i t iz jednačina (1), daje analitički izraz, tj. jednačinu cilindrične površine.

Ako direktrisa leži npr. u ravni XOY, tada jednačine (2) imaju oblik:

$$\Phi_1(x, y)=0, \quad \Phi_2\equiv z=0,$$

pa uslovi (1) postaju

$$\xi=x+tl, \quad \eta=y+tm, \quad \zeta=z+tn, \quad \Phi_1(\xi, \eta)=0, \quad \zeta=0.$$

Odavde iz treće jedačine je $t=(-z)/n$, te prve dve daju

$$\xi=x-\frac{l}{n}z, \quad \eta=y-\frac{m}{n}z$$

i zamenom u četvrtu dobija se jednačina cilindrične površine

$$\Phi_1\left(x-\frac{l}{n}z, \quad y-\frac{m}{n}z\right)=0.$$

Za $l=m=0$, tj. $a=(0, 0, n)$ poslednja jednačina daje $\Phi_1(x, y)=0$, tj. jednakost između dve promenljive predstavlja u prostoru jednačinu cilindrične površine sa direktrisom u jednoj od koordinatnih ravni i generatrisom upravnom na toj ravni.

ZADATAK 1. Odrediti jednačinu cilindrične površine čija je direktrisa krug $x^2+y^2=1$ u ravni XOY, a generatrisa je paralelna vektoru $a=(1, 1, 1)$.

Rezultat. Napred izloženi postupak dovodi do sistema od pet jednakosti

$$\xi=x+t, \quad \eta=y+t, \quad \zeta=z+t, \quad \xi^2+\eta^2=1, \quad \zeta=0,$$

odakle se eliminacijom četiri parametra ξ, η, ζ, t, po izloženom postupku dobija za jednačinu cilindrične površine

$$(x-z)^2+(y-z)^2=1.$$

ZADATAK 2. Odrediti jednačinu cilindrične površine, čija je direktrisa krug sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom r, koji leži u ravni $y=z$, a čija je generatrisa paralelna sa pravom $x=mz$, $y=nz$.

Rezultat. Jednačine direktrise definisane su sa

(1) $\quad x^2+y^2+z^2=r^2, \quad y=z$

a jednačine generatrise su:

(2) $\quad \dfrac{X-x}{m}=\dfrac{Y-y}{n}=Z-z=t$

(X, Y, Z — tekuće koordinate; x, y, z koordinate određene, ali proizvoljno odabrane tačke na generatrisi). Ako se sa (ξ, η, ζ) označe koordinate tačke preseka generatrise i direktrise, tada ove moraju zadovoljiti jednačine (1) i (2), tj. mora biti

(3) $\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2, \quad \eta=\zeta; \quad \xi=x+mt, \quad \eta=y+nt, \quad \zeta=z+t.$

Eliminacijom četiri parametra ξ, η, ζ, t iz skupa jednačina (3) dobiće se veza između (x, y, z) koja će predstavljati jednačinu cilindrične površine. Postupak eliminacije je sledeći. Četvrta i peta od jednakosti (3) s obzirom na drugu daju: $y+nt=z+t$, odakle je

$$t=\frac{y-z}{1-n}$$

pa je

(4) $\quad \eta=\zeta=\dfrac{y-nz}{1-n}.$

Iz jednakosti $\xi=x+mt$ proizilazi

(5) $\quad \xi=x+\dfrac{m}{1-n}(y-z).$

Zamenom ξ, η, ζ iz (4) i (5) u prvu jednačinu (3), dobija se

$$\big((1-n)x+m(y-z)\big)^2+2(y-nz)^2=(1-n)^2r^2,$$

koja predstavlja jednačinu tražene cilindrične površine.

Čitaocu se ostavlja da reši ovaj zadatak za slučajeve: a) kad su generatrise paralelne osi OZ; b) kad je ravan direktrise, koja prolazi kroz osu OX, nagnuta pod uglom α prema ravni XOY.

ZADATAK 3. Odrediti jednačinu cilindrične površine čija je direktrisa: $(x-a)^2=-2p(y-b)$, $(p>0)$, $z=c$, a generatrise su paralelne pravoj $x=mz$, $y=nz$.

Rešenje. Jednakostima (3) u zadatku 2 ovde odgovara sledeći skup jednačina:

$$(\xi-a)^2=-2p(\eta-b), \quad \zeta=c; \quad \xi=x+mt, \quad \eta=y+nt, \quad \zeta=z+t.$$

Odavde je

$$t=c-z; \quad \xi=x+m(c-z), \quad \eta=y+n(c-z), \quad \zeta=c.$$

Zamenom u prvu jednačinu dobija se jednačina tražene cilindrične površine (parabolični cilindar):

$$[x-a-m)(z-c)]^2+2p[y-b-n(z-c)]=0.$$

ZADATAK 4. Koliki mora biti parametar k u jednačini ravni $z=kx+c$, da bi ova sekla eliptični cilindar $9x^2+25y^2=225$ po liniji, čija je projekcija na ravan YOZ krug?

Rešenje. Iz $z=kx+c$ proizilazi $x=\dfrac{1}{k}(z-c)$, pa se zamenom u jednačinu datog cilindra dobija $9(z-c)^2+25k^2y^2=225k^2$. Ova jednačina predstavlja jednačinu jedne cilindrične površine koja prolazi kroz liniju preseka date ravni i datog eliptičnog cilindra. Prema tome, projekcija ove linije u ravni YOZ biće:

$$x=0, \quad 9(z-c)^2+25k^2y^2=225k^2.$$

Poslednja linija predstavlja krug ako je $25k^2=9$.

6.11. KONUSNE POVRŠINE

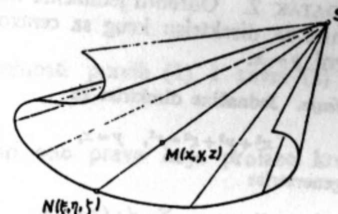
Definicija 1. *Konusna površina* (sl. 6.11.1) *je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje obrazuje jedna prava — izvodnica (generatrisa) koja prolazi kroz jednu stalnu tačku* $S(a, b, c)$ *— teme (vrh) konusa i kroz tačke na datoj krivoj — vodilji (direktrisi).*

Neka su jednačine direktrise:

(1) $\quad \Phi_1(x, y, z)=0, \quad \Phi_2(x, y, z)=0,$

a parametarske jednačine generatrise

(2) $\quad X=a+(x-a)t, \quad Y=b+(y-b)t, \quad Z=c+(z-c)t,$



Sl. 6.11.1.

gde su (X, Y, Z) — tekuće koordinate, (x, y, z) koordinate jedne promenljive tačke duž generatrise, $S(a, b, c)$ koordinate temena a t parametar. Ako se sa (ξ, η, ζ) označe koordinate tačke N u kojoj generatrisa seče direktrisu, tada ove zadovoljavaju jednakosti (1) i (2), te je

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)=0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta)=0;$$

$$\xi=a+(x-a)t, \quad \eta=b+(y-b)t, \quad \zeta=c+(z-c)t.$$

Eliminacijom četiri parametra ξ, η, ζ, t iz prethodnih pet jednakosti dobija se jednačina $F(x, y, z)=0$ koja predstavlja jednačinu konusne površine.

ZADATAK 1. Data je hiperbola u ravni XOZ sa realnom osom $2c$ na osi OZ i imaginarnom $2a$ na osi OX. Ona je direktrisa konusne površine, čiji se vrh nalazi u tački $B(0, b, 0)$. Odrediti jednačinu ove konusne površine.

Tako, ako je ravan upravljanja $z=0$, izvodnice — prave kroz osu $OZ: y=m_1x,\ z=n_2$, a direktrisa kriva linija $\Phi_1(x, y, z)=0$, $\Phi_2(x, y, z)=0$ i ako se sa $M(x, y, z)$ označi proizvoljna tačka konoidne površine, a sa $N(\xi, \eta, \zeta)$ tačka preseka izvodnice i direktrise, tada postoje sledeće jednakosti

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)=0,\quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta)=0,\quad y=m_1x,\quad z=n_2,\quad \eta=m_1\xi,\quad \zeta=n_2.$$

Iz ovih šest jednakosti mogu se eliminisati pet parametara $\xi, \eta, \zeta, m_1, n_2$, pa će rezultat ove eliminacije predstavljati vezu između (x, y, z) tj. jednačinu tražene konoidne površine. Postupak eliminacije je sledeći. Iz četvrte i pete jednakosti imamo $\zeta=z$; iz treće $m_1=\frac{y}{x}$, pa zamenom u petu dobijamo $\eta=\frac{y}{x}\xi$.

Zamenom ξ i η u prve dve jednakosti, nalazi se

$$\Phi_1\left(\xi, \frac{y}{x}\xi, z\right)=0,\quad \Phi_2\left(\xi, \frac{y}{x}\xi, z\right)=0,$$

odakle treba još izvršiti eliminaciju parametra ξ; pa će se doći do jednakosti $F(x, y, z)=0$, koja predstavlja jednačinu konoidne površine.

ZADATAK 1. Parabola sa temenom u tački $S(a, 0, c)$ je direktrisa konoidne površine, čije izvodnice prolaze kroz osu OZ i čija je ravan upravljanja — ravan XOY. Ravan parabole je paralelna ravni YOZ, a njena osa — paralelna osi OZ.

Odrediti jednačinu ove konoidne površine.

Rešenje. Jednačine direktrise su definisane skupom jednakosti

$$x=a,\quad y^2=2p(z-c),$$

a jednačine izvodnice su

$$y=m_1x,\quad z=n_2.$$

Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka na konoidnoj površini, a $N(\xi, \eta, \zeta)$ tačka preseka izvodnice i direktrise, tada postoje ove jednakosti

$$\xi=a,\quad \eta^2=2p(\zeta-c);\quad \eta=m_1\xi,\quad \zeta=n_2;\quad y=m_1x,\quad z=n_2.$$

Eliminacijom pet parametara $\xi, \eta, \zeta;\ m_1, n_2$ iz prethodnih šest jednačina dobija se

$$\zeta=z,\quad m_1=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{y}{x}\xi,\quad \eta=\frac{y}{x}a,\quad \frac{y^2}{x^2}a^2=2p(z-c),$$

tj. jednačina konoidne površine u obliku: $a^2y^2=2px^2(z-c)$.

ZADATAK 2. Jedna prava odseca na pozitivnim delovima X i Y-ose odsečke $OA=OB=a$. Duž $AB=a\sqrt{2}$ je prečnik kruga čija je ravan upravna na ravni XOY. Izvodnica konoidne površine se kreće tako da stalno seče ovu kružnu liniju i osu OZ i ostaje paralelna ravni XOY (sl. 6.12.1).

Odrediti jednačinu ove konoidne površine.

Rešenje. Jednačine direktrise (kruga) su: $x+y=a$, $x^2+y^2+z^2-ax-ay=0$, a jednačine izvodnice: $y=m_1x$, $z=n_2$. Koordinate tačke $M(x, y, z)$ na konoidnoj površini i tačke $N(\xi, \eta, \zeta)$ preseka izvodnice sa direktrisom zadovoljavaju sledeći skup jednakosti

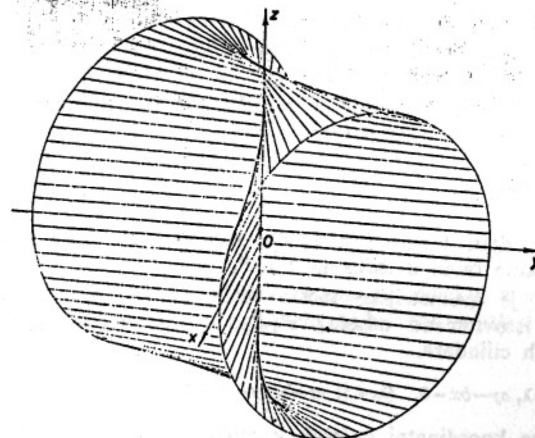
$$\xi+\eta=a,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-a\xi-a\eta=0;\quad y=m_1x,\quad z=n_2;\quad \eta=m_1\xi,\quad \zeta=n_2.$$

Postupak eliminacije $\xi, \eta, \zeta;\ m_1, n_2$ je sledeći:

$$\zeta=z,\quad m_1=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{y}{x}\xi,\quad \xi+\frac{y}{x}\xi=a,\quad \xi=\frac{ax}{x+y},$$

pa zamenom u drugu iz prethodnog skupa jednakosti dobija se jednačina konoidne površine u definitivnom obliku:

$$z^2(x+y)^2=2a^2xy.$$



Sl. 6.12.1.

ZADATAK 3. Na osi OX date su tačke P_1 i P_2 sa apscisama $+a$ i $-a$. Tačka P se kreće u prostoru tako da je $\frac{P_1P}{P_2P}=\frac{\lambda}{1}$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka P. Ispitati slučaj $\lambda=1$.

Rezultat. $(1-\lambda^2)(x^2+y^2+z^2)-2ax(1+\lambda^2)+a^2(1-\lambda^2)=0.$

ZADATAK 4. Sfera poluprečnika r opisana oko koordinatnog početka O seče negativnu granu ose OX u tački S_1. Duž OS_1 je produžena preko S_1 do tačke S_2 tako da je $S_1S_2=2OS_1$. Poluprečnik sfere OP je produžen preko P do P' tako da je $PP'=OP$.

Odrediti geometrijsko mesto tačke preseka Q pravih S_1P i S_2P', ako se tačka P kreće po sferi.

Rezultat. $(x-3r)^2-y^2+z^2=16r^2.$

ZADATAK 5. Odrediti geometrijsko mesto tačaka za koje rastojanja od koordinatnog početka i od ravni $z=k$ stoje u odnosu $\lambda:1$. Diskutovati rezultat za različite vrednosti k i λ.

Rezultat. $x^2+y^2+(1-\lambda^2)z^2+k\lambda^2(2z-k)=0$; dvograni hiperboloid, paraboloid ili elipsoid, prema tome da li je $\lambda>1$, $\lambda=1$ ili $\lambda<1$.

ZADATAK 6. Dokazati da linija preseka površina $x^2+y^2-z^2=r^2$ i $z^2=rx$ leži: a) na sferi; b) na kružnom cilindru, čije su generatrise paralelne osi OZ; c) napisati jednačinu YZ-projekcije date krive.

Rezultat. a) $(x-r)^2+y^2+z^2=2r^2$; b) $\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=5\frac{r^2}{4}$; c) $z^4+r^2(y^2-z^2)=r^4$.

Tako, ako je ravan upravljanja $z=0$, izvodnice — prave kroz osu $OZ: y=m_1 x,\ z=n_2$, a direktrisa kriva linija $\Phi_1(x, y, z)=0,\ \Phi_2(x, y, z)=0$ i ako se sa $M(x, y, z)$ označi proizvoljna tačka konoidne površine, a sa $N(\xi, \eta, \zeta)$ tačka preseka izvodnice i direktrise, tada postoje sledeće jednakosti

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)=0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta)=0, \quad y=m_1 x, \quad z=n_2, \quad \eta=m_1 \xi, \quad \zeta=n_2.$$

Iz ovih šest jednakosti mogu se eliminisati pet parametara $\xi, \eta, \zeta, m_1, n_2$, pa će rezultat ove eliminacije predstavljati vezu između (x, y, z) tj. jednačinu tražene konoidne površine. Postupak eliminacije je sledeći. Iz četvrte i pete jednakosti imamo $\zeta=z$; iz treće $m_1=\frac{y}{x}$, pa zamenom u petu dobijamo $\eta=\frac{y}{x}\xi$.

Zamenom ξ i η u prve dve jednakosti, nalazi se

$$\Phi_1\left(\xi, \frac{y}{x}\xi, z\right)=0, \quad \Phi_2\left(\xi, \frac{y}{x}\xi, z\right)=0,$$

odakle treba još izvršiti eliminaciju parametra ξ, pa će se doći do jednakosti $F(x, y, z)=0$, koja predstavlja jednačinu konoidne površine.

ZADATAK 1. Parabola sa temenom u tački $S(a, 0, c)$ je direktrisa konoidne površine, čije izvodnice prolaze kroz osu OZ i čija je ravan upravljanja — ravan XOY. Ravan parabole je paralelna ravni YOZ, a njena osa — paralelna osi OZ.

Odrediti jednačinu ove konoidne površine.

Rešenje. Jednačine direktrise su definisane skupom jednakosti

$$x=a, \quad y^2=2p(z-c),$$

a jednačine izvodnice su

$$y=m_1 x, \quad z=n_2.$$

Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka na konoidnoj površini, a $N(\xi, \eta, \zeta)$ tačka preseka izvodnice i direktrise, tada postoje ove jednakosti

$$\xi=a, \quad \eta^2=2p(\zeta-c); \quad \eta=m_1\xi, \quad \zeta=n_2; \quad y=m_1 x, \quad z=n_2.$$

Eliminacijom pet parametara $\xi, \eta, \zeta; m_1, n_2$ iz prethodnih šest jednačina dobija se

$$\zeta=z, \quad m_1=\frac{y}{x}, \quad \eta=\frac{y}{x}\xi, \quad \eta=\frac{y}{x}a, \quad \frac{y^2}{x^2}a^2=2p(z-c),$$

tj. jednačina konoidne površine u obliku: $a^2 y^2=2px^2(z-c)$.

ZADATAK 2. Jedna prava odseca na pozitivnim delovima X i Y-ose odsečke $OA=OB=a$. Duž $AB=a\sqrt{2}$ je prečnik kruga čija je ravan upravna na ravni XOY. Izvodnica konoidne površine se kreće tako da stalno seče ovu kružnu liniju i osu OZ i ostaje paralelna ravni XOY (sl. 6.12.1).

Odrediti jednačinu ove konoidne površine.

Rešenje. Jednačine direktrise (kruga) su: $x+y=a,\ x^2+y^2+z^2-ax-ay=0$, a jednačine izvodnice: $y=m_1 x,\ z=n_2$. Koordinate tačke $M(x, y, z)$ na konoidnoj površini i tačke $N(\xi, \eta, \zeta)$ preseka izvodnice sa direktrisom zadovoljavaju sledeći skup jednakosti

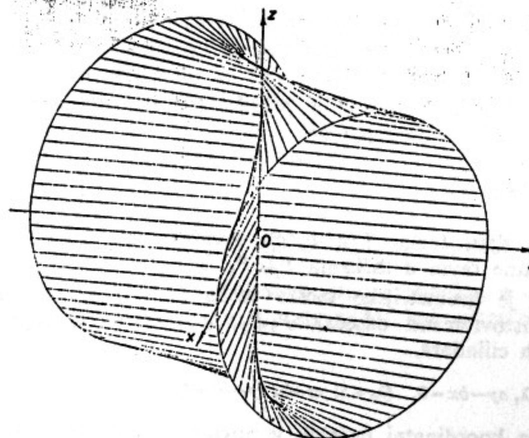
$$\xi+\eta=a, \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-a\xi-a\eta=0; \quad y=m_1 x, \quad z=n_2; \quad \eta=m_1\xi, \quad \zeta=n_2.$$

Postupak eliminacije $\xi, \eta, \zeta; m_1, n_2$ je sledeći:

$$\zeta=z, \quad m_1=\frac{y}{x}, \quad \eta=\frac{y}{x}\xi, \quad \xi+\frac{y}{x}\zeta=a, \quad \xi=\frac{ax}{x+y},$$

pa zamenom u drugu iz prethodnog skupa jednakosti dobija se jednačina konoidne površine u definitivnom obliku:

$$z^2(x+y)^2=2a^2xy.$$



Sl. 6.12.1.

ZADATAK 3. Na osi OX date su tačke P_1 i P_2 sa apscisama $+a$ i $-a$. Tačka P se kreće u prostoru tako da je $\frac{P_1P}{P_2P}=\frac{\lambda}{1}$.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka P. Ispitati slučaj $\lambda=1$.

Rezultat. $(1-\lambda^2)(x^2+y^2+z^2)-2ax(1+\lambda^2)+a^2(1-\lambda^2)=0.$

ZADATAK 4. Sfera poluprečnika r opisana oko koordinatnog početka O seče negativnu granu ose OX u tački S_1. Duž OS_1 je produžena preko S_1 do tačke S_2 tako da je $S_1S_2=2OS_1$. Poluprečnik sfere OP je produžen preko P do P' tako da je $PP'=OP$.

Odrediti geometrijsko mesto tačke preseka Q pravih S_1P i S_2P', ako se tačka P kreće po sferi.

Rezultat. $(x-3r)^2-y^2+z^2=16r^2.$

ZADATAK 5. Odrediti geometrijsko mesto tačaka za koje rastojanja od koordinatnog početka i od ravni $z=k$ stoje u odnosu $\lambda:1$. Diskutovati rezultat za različite vrednosti k i λ.

Rezultat. $x^2+y^2+(1-\lambda^2)z^2+k\lambda^2(2z-k)=0$; dvograni hiperboloid, paraboloid ili elipsoid, prema tome da li je $\lambda>1,\ \lambda=1$ ili $\lambda<1$.

ZADATAK 6. Dokazati da linija preseka površina $x^2+y^2-z^2=r^2$ i $z^2=rx$ leži: a) na sferi; b) na kružnom cilindru, čije su generatrise paralelne osi OZ; c) napisati jednačinu YZ-projekcije date krive.

Rezultat. a) $(x-r)^2+y^2+z^2=2r^2$; b) $\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=5\frac{r^2}{4}$; c) $z^4+r^2(y^2-z^2)=r^4$.

Zadatak 7. Data je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$. Odrediti geometrijsko mesto vrhova svih konusnih površina koje prolaze kroz ovu elipsu, a ravan XOZ seku po krugu.

Rezultat. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$, $x=0$.

Zadatak 8. Tačke $P_1(a, 0, 0)$ i $P_2(-a, 0, 0)$ su centri dva kruga K_1 i K_2 sa poluprečnicima ρ_1 i ρ_2. Ravni ovih krugova su upravne na osi OX. Tačke P_1 i P_2 su vrhovi dveju konusnih površina, čije su direktrise K_2 odnosno K_1.

Odrediti geometrijsko mesto linije preseka ove dve konusne površine, ako se ρ_1 i ρ_2 menjaju tako da je $\rho_1\rho_2=a^2$.

Rezultat. $\pm\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=\pm\frac{a^2}{4}$.

Zadatak 9. Kroz datu tačku $T(a, b, c)$ povučena je jedna pokretna prava koja seče koordinatne ravni u tačkama P_1, P_2, P_3.

Dokazati da je geometrijsko mesto tačke P, koja deli odsečak P_1P_2 u razmeri $\lambda_1:1$, a istovremeno odsečak P_2P_3, u razmeri $\lambda_2:1$, linija preseka dvaju hiperboličnih cilindara.

Rezultat. $(\lambda_1+1)\,xy-\lambda_1\,ay-bx=0$, $(\lambda_2+1)\,yz-\lambda_2\,cy-bz=0$.

Zadatak 10. Kroz koordinatni početak je povučena prava koja zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama. Ova prava rotira oko simetrale ugla koji zaklapaju pozitivne grane osa OX i OY. Napisati jednačinu nastale rotacione (konusne) površine.

Rezultat. $(x+y+z)^2-2\,(x^2+y^2+z^2)=0$.

Zadatak 11. Direktrisa cilindrične površine je krug čiji centar leži u ravni YOZ, dodiruje osu OY u koordinatnom početku i ima prečnik r. Generatrisa ove cilindrične površine je: a) paralelna ravni XOZ i prema ravni XOY je nagnuta pod uglom α $(k=\operatorname{tg}\alpha)$; b) paralelna pravoj $x=pz$, $y=qz$. Odrediti jednačinu ove površine.

Rezultat. a) $y^2+(z-kx)^2-2r\,(z-kx)=0$; b) $(py-qx)^2+(x-pz)^2+2pr\,(x-pz)=0$.

Zadatak 12. Parabola sa temenom u tački $T(a, 0, c)$ je direktrisa konoidne površine, čija je osa — osa OZ, a ravan upravljanja — ravan XOY. Ravan parabole je paralelna ravni YOZ, a njena osa je paralelna osi OZ. Odrediti jednačinu ove konoidne površine.

Rezultat. $a^2y^2=2px^2\,(z-c)$.

Zadatak 13. Iz tačke P koja se kreće po rotacionom paraboloidu $y^2+z^2=2px$ povučena je normala PQ na ravan YOZ. Tačka Q je spojena sa žižom F paraboličkog preseka datog paraboloida sa ravni XOY, a tačka P je spojena sa koordinatnim početkom O.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka preseka OP sa FQ.

Rezultat. Rotacioni elipsoid $\frac{\left(x-\frac{p}{4}\right)^2}{\frac{p^2}{16}}+\frac{y^2+z^2}{\frac{p^2}{4}}=1$ sa centrom $O'\left(\frac{p}{4}, 0, 0\right)$.

Zadatak 14. Dokazati da se linija preseka površina $z^2-x^2-y^2=r^2$ i $y^2=2rx$ sastoji iz dve ravne krive, čije su ravni paralelne osi OY i koje se na ravan YOZ projekciraju kao dve parabole.

Rezultat. $z=\pm x\pm r$; $y^2=\pm 2r\,(z\mp r)$.

Zadatak 15. Dokazati da proizvoljna ravan seče rotacioni paraboloid $x^2+y^2=2pz$ po elipsi, čija je projekcija na ravan XOY krug.

Zadatak 16. Date su tri prave koje su paralelne istoj ravni, na primer

1) $ay-bx=0$, $z=0$; 2) $x=0$, $z=c_1$; 3) $y=0$, $z=c_2$.

Četvrta prava kreće se tako da seče ove tri date prave.

Odrediti jednačinu površine koju obrazuje pokretna prava.

Šta predstavlja ova jednačina za $c_1=c_2$?

Rezultat. $(bc_1\,x-ac_2\,y)\,z-c_1\,c_2\,(bx-ay)=0$.

Zadatak 17. Dokazati da elipsoid $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ prelazi u eliptični paraboloid ako mu jedno teme ostaje u koordinatnom početku, a ose neograničeno rastu tako da parametar ravnog preseka elipsoida, koji prolazi kroz početak, ostaje konstantan.

Zadaci za rešavanje

M I, Analitička geometrija u prostoru: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.25, 4.28, 4.29, 4.30, 4.32, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 5.12, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6.

DODATAK

1. BOOLEOVA ALGEBRA
2. IZVOD DETERMINANTE
3. HURWITZOVI POLINOMI

1. BOOLEOVA ALGEBRA

1.1. DEFINICIJA

Definicija 1. *Skup B u kome su definisane dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ (umesto $a\cdot b$ pišemo ab) naziva se* Booleovom *algebrom ako važe sledeće aksiome:*

(1) $(\forall x, y \in B)$ $x+y=y+x$ (komutativnost),

(2) $(\forall x, y \in B)$ $xy=yx$ (komutativnost),

(3) $(\exists 0 \in B)\ (\forall x \in B)$ $0+x=x$ (neutralni element),

(4) $(\exists 1 \in B)\ (1 \neq 0)\ (\forall x \in B)$ $1\,x=x$ (neutralni element),

(5) $(\forall x, y, z \in B)$ $x(y+z)=xy+xz$ (distributivnost),

(6) $(\forall x, y, z \in B)$ $x+yz=(x+y)\,(x+z)$ (distributivnost),

(7) $(\forall x \in B)\ (\exists x' \in B)$ $(x+x'=1)\wedge(xx'=0)$ (komplement).

Aksiome (1) i (2) kazuju da su operacije $+$ i $\cdot$ (svaka zasebno) komutativne. Aksiome (3) i (4) kazuju da za ove operacije postoje neutralni elementi koji su međusobno različiti. Aksiome (5) i (6) kazuju da je svaka operacija $+$ i $\cdot$ distributivna u odnosu na drugu.

Polazeći od ovih aksioma, može se dokazati da u svakoj Booleovoj algebri važe sledeće relacije:

(8) $(\forall x \in B)$ $x+x=x$ (idempotentnost),

(9) $(\forall x \in B)$ $xx=x$ (idempotentnost),

(10) $(\forall x \in B)$ $1+x=1$,

(11) $(\forall x \in B)$ $0\,x=0$,

(12) $(\forall x, y \in B)$ $x(x+y)=x$ (apsorptivnost),

(13) $(\forall x, y \in B)$ $x+xy=x$ (apsorptivnost),

(14) $(\forall x, y, z \in B)$ $(x+y)+z=x+(y+z)$ (asocijativnost),

(15) $(\forall x, y, z \in B)$ $(xy)\,z=x\,(yz)$ (asocijativnost),

(16) element x' koji postoji na osnovu (7) je jedinstven za svako $x \in B$,

(17) $(\forall x \in B)$ $(x')'=x$,

(18) $0'=1$, $1'=0$,

(19) $(\forall x, y \in B)$ $(x+y)'=x'\,y'$,

(20) $(\forall x, y \in B)$ $(xy)'=x'+y'$.

Dokažimo (8) i (9). Imamo

$x=x+0$ na osnovu (3)

$=x+xx'$ na osnovu (7)

$=(x+x)\,(x+x')$ na osnovu (6)

$=(x+x)\cdot 1$ na osnovu (7)

$=x+x$ na osnovu (4),

i slično,

$x=x\cdot 1$ na osnovu (4)

$=x(x+x')$ na osnovu (7)

$=xx+xx'$ na osnovu (5)

$=xx+0$ na osnovu (7)

$=xx$ na osnovu (3).

Primetimo da se iz (8) dobija (9) ako se umesto $+$ stavi $\cdot$, i obrnuto, iz (9) se dobija (8) ako se umesto $\cdot$ stavi $+$. Zato te dve relacije nazivamo dualnim. Štaviše dokaz relacije (9) može se dobiti iz dokaza relacije (8) na taj način što se svuda zamene znaci $+$ i $\cdot$ i elementi 0 i 1.

Uopšte, svaka teorema u Booleovoj algebri ima svoju dualnu koja se dobija zamenom znakova $+$ i $\cdot$ i elemenata 0 i 1. Zato je dovoljno dokazivati samo jednu od dveju dualnih teorema. Dualne su, na primer, teoreme (10) i (11), (12) i (13), (14) i (15), prva i druga iz (18), (19) i (20). Dualitet Booleove algebre je posledica simetrije koju poseduju aksiomi (1)–(7). Naime ti aksiomi se ne menjaju ako se u njima svuda zamene znakovi $+$ i $\cdot$ i elementi 0 i 1.

Primer 1. Ako je $B=P(I)$ partitivni skup univerzalnog skupa I, tada su elementi skupa B podskupovi skupa I. Ako je $x, y \in B$, tj. $x \subset I$, $y \subset I$, tada ćemo definisati

$$x+y=x\cup y, \quad x\cdot y=x\cap y.$$

Bez teškoća može se proveriti da tada važe svi zakoni (1)–(7), pri čemu je x' komplement skupa x, $0=\varnothing$, $1=I$. Ova Booleova algebra se naziva algebrom skupova.

Primer 2. Dvočlani skup $\{0, 1\}$ sa operacijama $+$ i $\cdot$ definisanim sa

(21) $0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1,\quad 1+1=1;$

(22) $0\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=0,\quad 1\cdot 0=0,\quad 1\cdot 1=1,$

ima strukturu Booleove algebre. Bez teškoće se proverava da važe aksiomi (1)–(7), pri čemu je

(23) $0'=1,\quad 1'=0.$

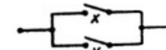
Ova Booleova algebra se naziva binarnom Booleovom algebrom.

Jedna važna interpretacija Booleove algebre je takozvana „prekidačka" algebra. Posmatrajmo dva prekidača vezana na red i paralelno (to su dve glavne veze u električnim kolima).



Sl. 1

Prekidači vezani na red. Kolo je zatvoreno samo ako su oba prekidača x i y zatvoreni



Sl. 2

Prekidači vezani paralelno. Kolo je zatvoreno ako je zatvoren bar jedan od prekidača x i y.

Za njih važe sledeće tabele:

Redna veza

x	y	kolo
otvoren	otvoren	otvoreno
otvoren	zatvoren	otvoreno
zatvoren	otvoren	otvoreno
zatvoren	zatvoren	zatvoreno

Paralelna veza

x	y	kolo
otvoren	otvoren	otvoreno
otvoren	zatvoren	zatvoreno
zatvoren	otvoren	zatvoreno
zatvoren	zatvoren	zatvoreno

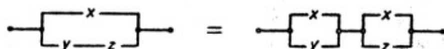
Uporedimo ove tablice sa (21) i (22). Vidimo da su ove tablice u saglasnosti sa (21) i (22) ako uspostavimo korespondenciju:

otvoren $\longleftrightarrow$ 0, zatvoren $\longleftrightarrow$ 1,

redna veza $\longleftrightarrow \cdot$, paralelna veza $\longleftrightarrow +$.

Sada se zakoni koji važe u binarnoj Booleovoj algebri mogu interpretirati pomoću prekidačkih kola. Na primer, aksioma (6) ima sledeću interpretaciju:

$$x+yz \quad = \quad (x+y)\cdot(x+z)$$



Na osnovu tablice

x	x'
0	1
1	0

zaključujemo da sa x' treba označiti prekidač koji tako funkcioniše da je otvoren kad je prekidač x zatvoren i obrnuto.

U prekidačkoj algebri Booleove promenljive $x, y, \ldots$ mogu uzimati samo dve vrednosti 0 i 1, tj. svaki prekidač može biti otvoren ili zatvoren a treća mogućnost ne postoji. Zato se svaka relacija može proveriti na taj način što se analiziraju sve mogućne kombinacije vrednosti 0 i 1 za sve Booleove promenljive koje se javljaju u relaciji. Ako relacija ima n promenljivih tada je broj ovih kombinacija jednak 2^n. Na primer, iz tablice zaključujemo da je $(x+y)'=x'y'$, tj. da je tačna relacija (19).

x	y	$x+y$	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

1.2. JEDNAČINE U BOOLEOVOJ ALGEBRI

Lema 1. *Sva rešenja jednačine*

$$x+y=0,$$

gde su x, y elementi date Booleove algebre B, data su sa $x=y=0$.

Dokaz. Iz $x+y=0$ sleduje

$$x=x+0=x+(x+y)=(x+x)+y=x+y=0,$$

kao i $y=0$.

Da je $x=y=0$ rešenje jednačine (1) proverava se neposredno.

Primedba 1. Opštija ekvivalencija

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \iff x_1=0 \wedge x_2=0 \wedge \cdots \wedge x_n=0,$$

dokazuje se na osnovu leme 1 primenom matematičke indukcije.

Lema 2. *Jednačina po x*

(1) $\quad a'x+ax'=0,$

gde je a dati elemenat Booleove algebre B, ima sva rešenja data sa $x=a$.

Dokaz. Iz $x=a$ sleduje

$$0=xx'=ax', \quad 0=aa'=xa', \quad 0=a'x+ax'.$$

Obrnuto, iz (1) na osnovu leme 1 sleduje

$$a'x=0 \wedge ax'=0.$$

Iz $a'x=0$ sleduje

$$1=0'=(ax')'=a'+(x')'=a'+x.$$

Dakle, $xa'=0$ i $a'+x=1$, odakle sleduje $x'=a'$, tj. $x=a$.

Lema 3. *Jednačina po x*

(2) $\quad ax+bx'=0$

ima rešenje ako i samo ako je $ab=0$. Ako je taj uslov ispunjen, sva rešenja su određena obrascem

(3) $\quad x=a'(b+y),$

gde je $y \in B$ proizvoljno.

Dokaz. Uslov je potreban. Zaista, ako postoji $x \in B$ koje zadovoljava jednačinu (2), dobijamo

$$\begin{aligned} ax+bx'=0 &\Rightarrow ax=0 \wedge bx'=0 \\ &\Rightarrow abx=0 \wedge abx'=0 \\ &\Rightarrow ab(x+x')=0 \\ &\Rightarrow ab=0. \end{aligned}$$

Uslov je dovoljan. Ako je $y \in B$ proizvoljno i x dato sa (3), tada je

$$\begin{aligned} ax+bx' &= aa'(b+y)+b(a'(b+y))' \\ &= b(a'(b+y))' \\ &= b(a+(b+y)') \\ &= b(b+y)' \\ &= bb'y' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Treba još dokazati da obrazac (3) obuhvata sva rešenja jednačine (2).

Iz (2) sleduje: $ax=0$ i $bx'=0$. Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} x &= (a+a')x = ax+a'x = 0+a'x = a' \cdot x, \\ bx &= bx+0 = bx+bx' = b(x+x') = b \cdot 1 = b, \\ x &= x+a'bx = a'x+a'b = a'(b+x). \end{aligned}$$

Ovim je lema 3 dokazana.

Iz ove leme dobija se

$$ax+bx'=0 \Rightarrow ab=0 \wedge (\exists y)(x=a'(b+y)).$$

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in B$ dati elementi Booleove algebre B i

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_k),\ G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_k)$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

dati polinomi po $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čiji koeficijenti zavise od $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Izne ćemo jedan metod rešavanja sistema

(4) $\quad F_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k) = G_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k) \quad (i=1, \ldots, m)$

po nepoznatima $x_1, \ldots, x_n \in B$.

Koristeći ekvivalenciju (videti Lemu 2)

(5) $\quad a=b \Leftrightarrow a'b+ab'=0,$

koja važi u svakoj Booleovoj algebri, sistem (4) se može zameniti ekvivalentnim sistemom

(6) $\quad F_iG_i'+F_i'G_i=0 \qquad (i=1, \ldots, m),$

gde su radi kratkoće izostavljeni argumenti $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k$.

Kako u svakoj Booleovoj algebri važi ekvivalencija (videti Primedbu na str. 33)

(7) $\quad b_1+b_2+\cdots+b_m=0 \Leftrightarrow b_1=0 \wedge b_2=0 \wedge \cdots \wedge b_m=0,$

sistem (6) je ekvivalentan sa jednačinom

(8) $\quad H(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_k)=0,$

gde je polinom H jednak zbiru levih strana svih jednačina sistema (6).

Time smo dokazali da je svaki sistem jednačina (4) ekvivalentan samo jednoj jednačini oblika (8).

Primenjujući operacije koje važe u Booleovoj algebri, jednačina (8) se može dovesti na oblik

(9) $$x_nH_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_1, \ldots, a_k)'+x_n'H_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_1, \ldots, a_k) + H_3(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_1, \ldots, a_k)=0$$

gde su H_i polinomi po $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Na osnovu leme 3 imamo

$$(8) \Leftrightarrow \begin{cases} H_1H_2=0,\ H_3=0, \\ (\exists y_n \in B)\ x_n=H_1'(H_2+y_n). \end{cases}$$

Ovoj ekvivalenciji se može dati oblik

$$(8) \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists y_n \in B)x_n = R_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, a_1, \ldots, a_k), \\ S(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_1, \ldots, a_k)=0, \end{cases}$$

gde je $R_n=H_1'(H_2+y_n)$, $S=H_1H_2+H_3$.

Ako se sad ovaj postupak primeni na jednačinu $S=0$, itd. posle $n-1$ koraka dolazimo do ekvivalencije oblika

$$(8) \Rightarrow \begin{cases} (\exists y_n \in B) & x_n=R_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, a_1, \ldots, a_k), \\ (\exists y_{n-1} \in B) & x_{n-1}=R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}, a_1, \ldots, a_k), \\ & \vdots \\ (\exists y_1 \in B) & x_1=R_1(y_1, a_1, \ldots, a_k), \\ T(a_1, a_2, \ldots, a_k)=0. & \end{cases}$$

Jednakost $T(a_1, a_2, \ldots, a_k)=0$ je potreban i dovoljan uslov da sistem (4) ima rešenje. Ako je taj uslov ispunjen, iz gornjih relacija se dobijaju sva rešenja sistema (4) uzimajući da su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljni.

Primer 1. Rešiti po x i y jednačinu

(10) $$xy+x'y'=a,$$

gde je a dati element Booleove algebre B.

Na osnovu (6) ova je jednačina ekvivalentna sa

$$(xy+x'y')a'+(xy+x'y')'a=0,$$

tj.

$$x(ya'+y'a)+x'(ya+y'a')=0.$$

Uslov $(ya'+y'a)(ya+y'a')=0$ je identički zadovoljen, te na osnovu leme 1 dobijamo

(11) $$x=(ya'+y'a)'(ya+y'a+z),$$

gde su $y, z \in B$ proizvoljni. Uprošćavanjem desne strane relacije (11) dobijamo

$$\begin{aligned} x &= (y'+a)(y+a')(ya+y'a'+z) \\ &= (ya+y'a')(ya+y'a'+z) \\ &= ya+y'a'. \end{aligned}$$

Promenljiva z je otpala pri ovim transformacijama (na osnovu zakona apsorpcije). Dakle sva rešenja jednačine (10) se dobijaju na taj način što se y uzima proizvoljno a x izračunava prema formuli $x=ya+y'a'$.

2. IZVOD DETERMINANTE

Stav 1. *Neka su elementi matrice* $A = \| a_{ij} \|_1^n$ *realne funkcije realne promenljive* x. *Tada je*

$$\frac{\mathrm{d}(\det A)}{\mathrm{d}x} = D_1 + D_2 + \cdots + D_n, \tag{1}$$

gde je

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & & a_{i-1,n} \\ \dfrac{\mathrm{d}a_{i1}}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{d}a_{i2}}{\mathrm{d}x} & & \dfrac{\mathrm{d}a_{in}}{\mathrm{d}x} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Dokaz. Na osnovu pravila za nalaženje izvoda složene funkcije imamo

$$\frac{\mathrm{d}(\det A)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x}. \tag{3}$$

Ako $\det A$ razvijemo po elementima i-te vrste imamo

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + \cdots + a_{ij} A_{ij} + \cdots + a_{in} A_{in},$$

pa, budući da algebarski komplementi $A_{i1}, \ldots, A_{in}$ ne zavise od a_{ij}, dobijamo

$$\frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = A_{ij}.$$

Prema tome, jednakost (3) postaje

$$\frac{\mathrm{d}(\det A)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

Razvoj determinante D_i po elementima i-te vrste je

$$D_i = A_{i1} \frac{\mathrm{d}a_{i1}}{\mathrm{d}x} + \cdots + A_{in} \frac{\mathrm{d}a_{in}}{\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

Iz (5) i (4) dobijamo (1).

3. HURWITZOVI POLINOMI

3.1. DEFINICIJE I NEKE OSOBINE

Definicija 1. *Realan polinom*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

zove se Hurwitzov polinom ako sve njegove nule x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *imaju osobinu* $\operatorname{Re} x_k < 0$.

Hurwitzovi polinomi kraće se zovu H-polinomi.

Stav 1. *Ako je polinom* (1) *H-polinom, tada su svi njegovi koeficijenti istog znaka. Važi i obrnuto ako je* $n = 1$ *i* $n = 2$.

Dokaz. Posmatrajmo polinom prvog stepena

$$a_0 x + a_1$$

i pretpostavimo da je on H-polinom, tj. da je njegova nula $x = -a_1/a_0$ negativan broj. To će biti ako i samo ako je: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ili $a_0 < 0$, $a_1 < 0$.

Obrnuto, ako je ispunjen prvi ili drugi od ovih uslova, polinom $a_0 x + a_1$ je H-polinom.

Posmatrajmo sada polinom drugog stepena. Pretpostavimo, prvo, da je on H-polinom, tj. da su njegove nule oblika

$$x_1 = -\alpha^2, \quad x_2 = -\beta^2 \; (\alpha, \beta \text{ realni}) \text{ u slučaju realnih nula,}$$

ili

$$x_1 = -\lambda^2 + i\mu, \; x_2 = -\lambda^2 - i\mu \; (\lambda, \mu \text{ realni}) \text{ u slučaju imaginarnih nula.}$$

Realni polinom drugog stepena, čije su nule x_1 i x_2, glasi

$$A(x + \alpha^2)(x + \beta^2) \qquad (A \text{ realna konstanta}),$$

odnosno

$$A\big((x + \lambda^2) - i\mu\big)\big((x + \lambda^2) + i\mu\big) \qquad (A \text{ realna konstanta}).$$

Dakle, polinomi su oblika

$$A\big(x^2 + (\alpha^2 + \beta^2) x + \alpha^2 \beta^2\big), \quad \text{tj.} \quad A\big(x^2 + 2\lambda^2 x + (\lambda^4 + \mu^2)\big),$$

i njihovi koeficijenti imaju iste znake.

Pretpostavimo sada da su istog znaka svi koeficijenti polinoma drugog stepena

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2.$$

Slučaj 1. Nule x_1 i x_2 ovog polinoma su realne. Tada iz jednakosti

$$x_1 x_2 = a_2/a_0 \qquad (a_2/a_0>0 \text{ po pretpostavci})$$

sleduje da su one obe pozitivne ili obe negativne.

Kako je, uz to,

$$x_1 + x_2 = -a_1/a_0 \qquad (a_1/a_0>0 \text{ po pretpostavci}),$$

zaključujemo da su obe nule x_1 i x_2 negativne.

Slučaj 2. Nule x_1 i x_2 ovog polinoma su imaginarne, tj. oblika

$$x_1 = \alpha + i\beta, \quad x_2 = \alpha - i\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ realni; } \beta \neq 0).$$

Tada iz jednakosti

$$x_1 + x_2 = 2\alpha = -a_1/a_0 \qquad (a_1/a_0>0 \text{ po pretpostavci})$$

sleduje da je $\operatorname{Re} x_1<0$ i $\operatorname{Re} x_2<0$.

Prema tome, polinomi prvog i drugog stepena su H-polinomi ako i samo ako su svi njihovi koeficijenti istog znaka.

Ako je $P(x)=P_1(x)P_2(x)$, polinom $P(x)$ je H-polinom ako i samo ako su $P_1(x)$ i $P_2(x)$ takođe H-polinomi.

Ranije smo dokazali da postoji jedinstvena faktorizacija realnog polinoma na realne linearne i kvadratne polinome.

Ako su svi linearni i kvadratni faktori u navedenoj faktorizaciji polinoma $P(x)$ H-polinomi, tada su svi koeficijenti polinoma $P(x)$ istog znaka.

Može se i ovako izreći:

Ako je realni deo svake nule polinoma $P(x)$ negativan broj, svi koeficijenti polinoma $P(x)$ su istog znaka.

Ako je $n \geq 3$, obrnuto ne važi, kao što se vidi, na primer, na polinomu

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1, \quad \text{tj.} \quad (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

3.2. SCHUROV POSTUPAK

Schur je dao interesantan postupak kojim se utvrđuje da li je realan polinom $P(x)$ H-polinom.

Pod $P^*(x)$ podrazumevaćemo polinom koji se dobija kada se u kompleksnom polinomu $P(x)$ svi koeficijenti zamene njihovim konjugovanim vrednostima i pored toga promeni znak koeficijenata neparnih potencija od x.

Operator $*$ ima osobinu $(P^*)^* \equiv P$.

Ako je $P(x)=Q(x)R(x)$ (P, Q, R polinomi sa kompleksnim koeficijentima), tada je

$$P^*(x)=Q^*(x)R^*(x).$$

Ne umanjujući generalnost rezultata, u daljem izlaganju pretpostavićemo da su svi koeficijenti a_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ polinoma $P(x)$ pozitivni.

Uporedo sa realnim polinomom $P(x)$ posmatrajmo polinom

$$P^*(x)=(-1)^n a_0 x^n + (-1)^{n-1} a_1 x^{n-1} + \cdots - a_{n-1}x + a_n.$$

Polinome $P(x)$ i $P^*(x)$ možemo predstaviti u obliku

(1) $$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = a_0 \prod_{k=1}^{n}(x-x_k),$$

(2) $$P^*(x)=a_0(-x-\overline{x}_1)(-x-\overline{x}_2)\cdots(-x-\overline{x}_n) = (-1)^n a_0 \prod_{k=1}^{n}(x+\overline{x}_k),$$

gde su x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ bilo realni brojevi, bilo po dva i dva konjugovano-kompleksna broja.

Neka je $x=u+iv$, $x_k=u_k+iv_k$ (i imaginarna jedinica; u, v, u_k, v_k realni). Tada je

$$|x+\overline{x}_k|^2-|x-x_k|^2=(x+\overline{x}_k)(\overline{x}+x_k)-(x-x_k)(\overline{x}-\overline{x}_k) = (x+\overline{x})(x_k+\overline{x}_k) = 4uu_k.$$

Ako je $u_k<0$, tada je

$$|x-x_k|<|x+\overline{x}_k| \text{ za } u<0,$$
$$|x-x_k|>|x+\overline{x}_k| \text{ za } u>0,$$
$$|x-x_k|=|x+\overline{x}_k| \text{ za } u=0.$$

Ako je $P(x)$ H-polinom, tj. ako je $u_k<0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, tada se na osnovu (1) i (2) dobijaju Schurove relacije:

(3) $$0 \leq |P(x)|<|P^*(x)| \text{ za } \operatorname{Re} x<0,$$
$$0 \leq |P^*(x)|<|P(x)| \text{ za } \operatorname{Re} x>0,$$
$$0<|P(x)|=|P^*(x)| \text{ za } \operatorname{Re} x=0.$$

Dokazaćemo sada teoremu:

Stav 1. *Ako su* α *i* β $(|\alpha|>|\beta|)$ *realni brojevi, polinomom* $P(x)$ *je H-polinom ako i samo ako je*

$$Q(x)=\alpha P(x)-\beta P^*(x)$$

H-polinom.

Dokaz. Ako je $P(x)$ H-polinom, na osnovu Schurovih relacija (3) i uslova $|\alpha|>|\beta|$ dobija se

$$|\alpha P(x)|>|\beta P^*(x)| \text{ za } \operatorname{Re} x \geq 0.$$

Dakle, ni za kakvo x za koje je $\operatorname{Re} x \geq 0$ ne važi

$$\alpha P(x)-\beta P^*(x)=0,$$

što znači da je ova jednakost moguća samo za $\operatorname{Re} x<0$.

Prema tome, sve nule polinoma $Q(x)$ imaju negativne realne delove, tj. $Q(x)$ je H-polinom.

Obrnuto, ako je $Q(x)$ H-polinom, takav će biti i polinom $P(x)$.

Da bismo ovo dokazali, posmatrajmo

$$Q^*(x) = \alpha P^*(x) - \beta P(x).$$

Iz ove jednakosti i

$$Q(x) = \alpha P(x) - \beta P^*(x)$$

sleduje

$$P(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} Q(x) + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} Q^*(x).$$

Kako je $|\alpha| > |\beta|$, dobija se

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}\right| > \left|\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right|.$$

Dakle, ako je $Q(x)$ H-polinom, $P(x)$ je takođe H-polinom.

Ovim je dokazana navedena teorema.

Prema Schurovim relacijama za jedan H-polinom važi

$$|P^*(-1)| > |P(-1)|.$$

Stoga možemo uzeti: $\alpha = P^*(-1)$, $\beta = P(-1)$.

Ako je $P(x)$ H-polinom, saglasno dokazanoj teoremi, polinom

$$Q(x) = P^*(-1) P(x) - P(-1) P^*(x)$$

je takođe H-polinom.

Kako je $x = -1$ nula polinoma $Q(x)$, količnik

$$P_1(x) = \frac{P^*(-1) P(x) - P(-1) P^*(x)}{x+1}$$

je H-polinom stepena $n-1$.

Ako je $P_1(x)$ H-polinom, polinom $(x+1) P_1(x)$ takođe je H-polinom.

3.3. SCHUROV KRITERIJUM

Ako je $a_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, uvek je

$$|P^*(-1)| > |P(-1)|, \quad \text{tj.} \quad (P^*(-1))^2 > (P(-1))^2.$$

Zaista, kako je

$$P^*(-1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

i

$$P(-1) = a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n,$$

važi nejednakost

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 > ((-1)^n a_0 + (-1)^{n-1} a_1 + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n)^2.$$

Polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ $(a_k > 0)$ je H-polinom ako i samo ako je

$$P_1(x) = \frac{P^*(-1) P(x) - P(-1) P^*(x)}{x+1}$$

H-polinom.

Primer 1. Za polinom $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5$ dobijamo:

$$P^*(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5, \quad P(-1) = -3, \quad P^*(-1) = 21.$$

Polinom $P_1(x)$ ima oblik

$$P_1(x) = \frac{1}{x+1}(21(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5) + 3(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5))$$

$$= \frac{12}{x+1}(2 + 3x + 6x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 9x^5)$$

$$= 12(2 + x + 5x^2 + x^3 + 9x^4) \qquad (x \neq -1).$$

Primenimo li ponovo Schurov kriterijum na polinom $\frac{1}{12} P_1(x)$, dobijamo

$$P_2(x) = \frac{1}{x+1}(18(2 + x + 5x^2 + x^3 + 9x^4) - 14(2 - x + 5x^2 - x^3 + 9x^4))$$

$$= \frac{4}{x+1}(2 + 8x + 5x^2 + 8x^3 + 9x^4)$$

$$= 4(2 + 6x - x^2 + 9x^3).$$

Kako $2 + 6x - x^2 + 9x^3$ nije H-polinom, dati polinom $P(x)$ takođe nije H-polinom.

Primedba 1. Nule pojinoma $P(x)$ su:

$$x_1 = -0{,}67\,033, \quad x_{2,3} = 029\,419 \pm 0{,}66\,836\, i, \quad x_{4,5} = -0{,}37\,570 \pm 0{,}57\,019\, i.$$

$P(x)$ zaista nije H-polinom.

3.4. SCHUROV KRITERIJUM ZA POLINOM TREĆEG STEPENA

Posmatrajmo polinom

$$P(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \qquad (a_k > 0;\ k = 0, 1, 2, 3).$$

Polinom $P_1(x)$, za ovaj slučaj, ima oblik

$$P(x) = \frac{2}{x+1}((a_3 + a_1)(a_2 x + a_0 x^3) + (a_2 + a_0)(a_3 + a_1 x^2)),$$

odakle se dobija

$$\frac{1}{2} P_1(x) = a_3(a_2 + a_0) + (a_2 a_1 - a_0 a_3) x + (a_3 + a_1) a_0 x^2.$$

Kako su, po pretpostavci, svi koeficijenti polinoma $P(x)$ pozitivni, potreban i dovoljan uslov da polinom $P_1(x)$ bude H-polinom je

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Na osnovu prethodnog može se formulisati:

Stav 1. *Realan polinom trećeg stepena*

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \qquad (a_0 > 0)$$

je H-*polinom ako i samo ako je* $a_k > 0\ (k = 1, 2, 3)$ *i* $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Ovom stavu ekvivalentan je sledeći:

Stav 2. *Polinom trećeg stepena*

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \qquad (a_0 > 0)$$

je H-*polinom ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Dokaz. Iz stava 1 neposredno sleduje stav 2. Dokazaćemo da važi i obrnuto. Kako je

$$D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad \text{i} \quad D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0,$$

dobija se $a_3 > 0$.

Budući da je $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ i $a_3 > 0$, dobija se

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \ \Rightarrow\ a_2 > 0.$$

Ovim je dokazana ekvivalentnost stavova 1 i 2.

3.5. SCHUROV KRITERIJUM ZA POLINOM ČETVRTOG STEPENA

Za polinom

(1) $$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \qquad (a_0 > 0),$$

primenom SCHUROvog rekurzivnog postupka dobija se rezultat:

Stav 1. *Potrebni i dovoljni uslovi da polinom* (1) *bude* H-*polinom su*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0,$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Ovaj stav može se iskazati na sledeći način:

Stav 2. *Polinom* (1) *je* H-*polinom ako i samo ako su ispunjeni uslovi:*

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

Stav 1 kao i ekvivalentnost stavova 1 i 2 dokazuju se slično kao u prethodnom paragrafu.

PRIMER 1. Za polinom $x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 8x + 5$, H-determinante su:

$$D_0 = 5, \quad D_1 = 8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 52,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 144, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 144.$$

Kako su sve determinante pozitivne, polinom je H-polinom.

3.6. KRITERIJUM ZA POLINOM STEPENA *n*

Stav 1. *Polinom*

(1) $$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 > 0)$$

predstavlja H-*polinom ako i samo ako je*

(2) $$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & & a_n \end{vmatrix} > 0,$$

gde treba staviti $a_j = 0$ *ako je* $j > n$.